

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზაზა ტოკლიკიშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი  
ფიზიკის მიმართულება

დინამიური ქაოსის რეალიზაცია ზოგიერთ მაგნიტურ  
და ოპტიკურ სისტემაში

ს ა დ ო ქ ტ ო რ ო დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სადოქტორო დისერტაციისა და  
სადოქტორო პროგრამის ხელმძღვანელი  
თსუ ზუსტ და  
საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის  
სრული პროფესორი

არჩილ უგულავა

თბილისი 2010 წელი

<b>სარჩევი</b>	
<b>შესავალი</b>	3
<b>თავი I. დინამიური ქაოსის მოკლე მიმოხილვა</b>	6
1.1. დინამიური ქაოსის განსაზღვრა	6
1.2. ქაოსი დისიპაციურ სისტემებში	9
1.3. ქაოსი კონსერვატიულ სისტემებში	32
<b>თავი II. ქაოსი არაწრფივ ბლოხის სისტემაში</b>	57
<b>თავი III. ერთგვაროვანი დამაგნიტების არაწრფივი და სტოქასტური დინამიკა თხელ მაგნიტურ სტრუქტურებში</b>	67
<b>თავი IV. არაწრფივი სპინური სისტემების სტოქასტური კონტროლი</b>	77
4.1. შესავალი	77
4.2. არაწრფივი სპინური მძივი გარე ველში	79
4.3. ორი სპინის შემთხვევა	80
4.4. კლასიკური ასახვები	83
4.5. რიცხვითი შედეგები	84
4.6. სასრული სპინური მძივი	85
4.7. დასკვნა	88
<b>თავი V. ქაოსი განზოგადებულ ჯეიმს-კომინგსის მოდელში</b>	89
5.1. შესავალი	89
5.2. რიცხვითი შედეგები	97
5.3. კვანტურ-მექანიკური განხილვა, ნარევი მდგომარეობის მოღება	100
5.4. კინეტიკური აღწერა	103
5.5. დასკვნა	107
<b>თავი VI. ორი ბმული ატომის ქაოსური დინამიკა ოპტიკურ რეზონატორში</b>	108
6.1 შესავალი	108
6.2 არაწრფივი ქვანტური დინამიკა	109
6.3 კვანტურ-სტატისტიკური განხილვა	114
6.4 დასკვნა	122
<b>VII. ძირითადი შედეგები</b>	123
<b>ლიტერატურა</b>	124

## შესავალი

ათწლეულების განმავლობაში იგულისხმებოდა, რომ სტატისტიკური ფიზიკის კანონები სამართლიანია მხოლოდ მაკროსკოპული, დიდი თავისუფლების ხარისხების მქონე სისტემებისათვის. გასული საუკუნის მიწურულს კი ცნობილი გახდა, რომ რამოდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე ბევრი არაწრფივი სისტემა შეიძლება ხასიათდებოდეს სტატისტიკური ყოფაქცევით. გამოირკვა რომ, არაწრფივ კლასიკურ ჰამილტონურ სისტემებს ახასიათებს განსაკუთრებული სახის არამდგრადობა, რომლის გამო სისტემის დინამიური მახასიათებლები ხდება დროის შემთხვევითი ფუნქციები. ამ მოვლენას დინამიური სტოქასტურობა ეწოდება [1-3].

შეუქცევადობის წარმოშობა კლასიკურ ქაოსურ სისტემებში დაკავშირებულია საწყისი პირობებისა და სისტემის პარამეტრების მცირე ვარიაციების მიმართ ფაზური ტრაექტორიების ლოკალურ არამდგრადობასთან. კლასიკურ ქაოსური სისტემებს ახასიათებს ექსპონენციალური მგრძობელობა ასეთი მცირე ცვლილებების მიმართ, რასაც თავის მხრივ მიყვავართ საწყისი ცდომილების დროში ექსპონენციალურ ზრდამდე. შედეგად, სტატისტიკური გასაშუალოების შემდეგ სისტემის დინამიკა ხდება შეუქცევადი.

კვანტურ შემთხვევაში შეუქცევადობის წარმოშობის საკითხი ჯერ კიდევ არ არის ბოლომდე ნათელი. საქმე იმაშია, რომ კვანტური განხილვის დროს ტრაექტორიის ცნება აზრს კარგავს. ამიტომ ქაოსური კვანტურ-მექანიკური სისტემებისათვის საჭიროა შეუქცევადობის შესაძლო მექანიზმის უფრო დეტალური ანალიზი. უფრო მეტიც, ასეთ სისტემებში შეუქცევადობის წარმოშობის შესაძლებლობაც კი ეჭვს იწვევს. კვანტური დინამიკა უნიტარულია და ამიტომ შექცევადიც. მეორე მხრივ, სისტემის პარამეტრების მცირე საწყისი ცდომილების დაშვების გარეშე კლასიკური ქაოსური დინამიკაც შექცევადი იქნება. უნდა აღინიშნოს, რომ კლასიკური ქაოსის შესწავლის დროს ჩვენ ჩვეულებრივ ვსწავლობთ სისტემის მდგრადობას საწყისი პირობებისა და სისტემის პარამეტრების მცირე ცვლილების მიმართ. ამ პარამეტრების მცირე საწყისი ცდომილება ყოველთვის არსებობს და მათ გვერდს ვერ ავუვლით. ამგვარად მცირე საწყისი ცდომილების არსებობა კი არ არის მთავარი, არამედ ის თუ რა სახის გავლენას ახდენს ის სისტემის დინამიკაზე. როგორც ცნობილია, რეგულარული სისტემის შემთხვევაში ასეთი გავლენა უმნიშვნელოა. ხოლო ქაოსური სისტემების შემთხვევაში მცირე საწყისი ცდომილების გავლენა ექსპონენციალურად იზრდება. მაშასადამე მცირე საწყისი ცდომილების გათვალისწინება მეორე შემთხვევაში აუცილებელია, პირველ შემთხვევაში კი არა.

პარამეტრებისა და საწყისი პირობების მცირე ცვლილების მიმართ, სისტემის მდგრადობის შესწავლის კვანტური ანალოგი არის კვანტური მდგომარეობის აღდგენის სიზუსტე დროის ინვერსიისას, ე.წ. Fidelity. Fidelity განსაზღვრავს, თუ რა სიზუსტით შეიძლება აღდგეს საწყისი ტალღური ფუნქცია შემოფოთებული ჰამილტონიანით სისტემის დროში უკუ-ევოლუციის დროს. Fidelity-ს ქაოსური სისტემებისათვის ახასიათებს დროში ექსპონენციალური ვარდნა. თუმცა ასეთი დამოკიდებულების მიზეზი დღემდე არ არის ახსნილი.

**თემის აქტუალობა**, ინტერესი ქაოსური სისტემების მიმართ გამოწვეულია ორი ფაქტორით: ღია სისტემების კლასიკური და კვანტური დინამიკის უფრო ღრმად შესწავლით და პრაქტიკული გამოყენების შესაძლებლობით კვანტური გამოთვლების სფეროში.

ბოლო წლებში დადგინდა, რომ დინამიური ქაოსი ხორციელდება მყარ სხეულებში: ფერომაგნიტური რეზონანსის პირობებში, ბირთვულ პარამაგნიტურ

სისტემებში, სპინურ მძივებში, ოპტიკურ რეზონატორებში და ა.შ. გამოყენების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია თუ პარამეტრების რა მნიშვნელობისათვის არის სისტემის დინამიკა მდგრადი და რა მნიშვნელობისათვის შეიძლება სისტემაში წარმოიქმნას ქაოსი ანუ რამდენად შეგვიძლია განვახორციელოთ კონტროლი დინამიური სისტემაში მიმდინარე პროცესების.

**დისერტაციის მიზანი:** დისერტაციის მიზანია დინამიური ქაოსის შესწავლა ზოგიერთ ფიზიკურ სისტემებში, კერძოდ, ფერომაგნეტიკებში, ბირთვულ პარამაგნიტურ სისტემებში, სპინურ მძივებში და ოპტიკურ რეზონატორებში. კერძოდ, შესასწავლი სისტემის მახასიათებელი პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის არის შესაძლებელი სისტემის რეგულარული ყოფაქცევა და რა მნიშვნელობებისათვის ქაოსური. აღნიშნულ საკითხს დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვე მასალათმცოდნეობის ფიზიკაში.

ზემოთ მოხსენიებული სისტემების შესწავლა ხორციელდება მათი აღმწერი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემების თეორიული და რიცხვითი ანალიზის საშუალებით. აღსანიშნავია ასეთი სისტემების კვლევის საქმეში კომპიუტერის და თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამების Matlab, Matematika, Maple დიდი მნიშვნელობა.

**მეცნიერული სიახლე:** ქვემოთ მოყვანილ დისერტაციაში:

1. ჩვენს მიერ შესწავლილია ქაოსის გამოვლინება ბლოხის არაწრფივ განტოლებათა სისტემაში. ანალიზური და რიცხვითი გამოთვლების საფუძველზე დადგენილი იქნა ქაოსური მოძრაობის წარმოშობის კრიტერიუმი. ნაჩვენებ იქნა, რომ ქაოსური რეჟიმის პირობებში სისტემაში შეიძლება წარმოიქმნას უცნაური ატრაქტორი.
2. ჩვენს მიერ შესწავლილ იქნა თხელი მაგნიტური ფირების დამაგნიტების ვექტორის რეგულარული და სტოქასტური დინამიკა. თხელი ფირების დამაგნიტების შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს თანამედროვე მასალათმცოდნეობაში. დამაგნიტების ვექტორის დინამიკა ასეთ სისტემებში აღიწერება არაწრფივი ლანდაუ-ლიფშიცის განტოლებებით. დისერტაციაში ნაჩვენებია, რომ თუ სისტემაზე ვიმოქმედებთ იმპულსების სერიით, მაშინ გარე ველის პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობისათვის შეგვიძლია მივაღწიოთ დამაგნიტების ვექტორის სტოქასტურ გაჯერებას. რიცხვითი ინტეგრების გამოყენებით ნაჩვენებია რომ გარე ველის იმპულსების ამპლიტუდის შერჩევით შეგვიძლია სტოქასტურად ვმართოთ დამაგნიტების ვექტორის საშუალო მნიშვნელობების დინამიკა.
3. დამაგნიტების ვექტორის სტოქასტური დინამიკის მართვის მექანიზმი განზოგადებულ იქნა სპინური მძივისათვის. დადგენილ იქნა რომ იძულებით სტოქასტურ რეჟიმში ხდება სპინებს შორის სივცითი კორელაციის გაწყვეტა.
4. დისერტაციაში შესწავლილია ორდონიანი და სამდონიანი სისტემების რეგულარული და ქაოსური დინამიკა ოპტიკურ რეზონატორებში. აღსანიშნავია, რომ ასეთი სისტემების შესწავლა წარმოადგენს კვანტური კომპიუტერის შექმნის საფუძველს. როგორც ცნობილია ჯეიმს-კომინგსის მოდელის მიხედვით, ორდონიანი სისტემებისთვის რეზონანსული დინამიკა რეგულარულია. დისერტაციაში ნაჩვენებია, რომ სამდონიანი სისტემებისათვის ეს ასე არ არის - ქაოსი და სისტემის არარეგულარული ყოფაქცევა შესაძლებელია რეზონანსულ შემთხვევაშიც. ორდონიანი სისტემებში ქაოსი შეიძლება წარმოიქმნას თუ გავითვალისწინებთ არაპირდაპირ ურთიერთქმედებას სპინებს შორის. დადგენილ იქნა, რომ დინამიურ ქაოსს კვანტურ მექანიკურად შეესაბამება სისტემის გადასვლა სუფთა მდგომარეობიდან ნარევე

მდგომარეობაში. პროცესი ხდება შეუქცევადი, ეს მოვლენა დინამიური ქაოსის ქვანტურ ანალოგად შეგვიძლია მივიჩნიოთ.

**პუბლიკაციები:** დისერტაციაში მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია ექვსი სამეცნიერო პუბლიკაციის სახით:

1. A.I. Ugulava, L.L. Chotorlishvili, Z.Z. Toklikishvili and A.V. Sagaradze, „**Chaotic dynamics of the nuclear magnetization on account of resonator effects**“ , Low Temperature Physics, vol. 32, №10, pp. 915-920, 2006;
2. A.I. Ugulava, L.L. Chotorlishvili and Z.Z. Toklikishvili, „ **Theory of stochastic saturation of ferromagnetic resonance**“ , Low Temperature Physics, vol. 34, №6, pp. 418-421, 2008;
3. L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, J. Berakdar, „**Stochastic switching and dynamical freezing in nonlinear spin systems**“, Physics Letters A, 373, (2009), 231-237;
4. L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, J. Berakdar, „**Stochastic dynamics and control of a driven nonlinear spin chain: the role of Arnold diffusion**“, Journal of Physics, Condensed Matter 21, 356001 (2009);
5. L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, „**Chaos in generalized Jaynes-Cummings model**“, Physics Letters A, 372 (2008), 2806-2815;
6. L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, „**Chaotic dynamics of coupled two-level atoms in the optical cavity**“, Eur. Phys.J. D 47, 433-445 (2008);

**დისერტაციის სტრუქტურა და მოცულობა:** დისერტაცია შედგება შესავლისაგან, ექვსი თავისაგან და დასკვნისაგან. შეიცავს 131 ნაბეჭდ გვერდს. დისერტაციაში წარმოდგენილია 1 ცხრილი 47 ნახაზი, ციტირებული ლიტერატურის ნუსხა, რომელიც შეიცავს 123 დასახელებას.

# თავი I. დინამიური ქაოსის მოკლე მიმოხილვა

## 1.1. დინამიური ქაოსის განსაზღვრება

დიდი ხნის განმავლობაში შეხედულებანი ქაოსის შესახებ ასოცირდებოდა სისტემაში ძალიან დიდი თავისუფლების ხარისხის არსებობასთან. თითქოსდა გაზის ცალკეული მოლეკულის მოძრაობა პრინციპში დეტერმინირებულია, მაგრამ რადგანაც სისტემა შედგება ძალიან ბევრი ნაწილაკისაგან, ამიტომ მისი ყოფაქცევა ძალიან რთულია და ამიტომაც დინამიური მიდგომა კარგავს აზრს. მაგრამ როგორც მრავალმა გამოკვლევებმა აჩვენა შემთხვევით ყოფაქცევას შეიძლება ადგილი ჰქონდეს რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სრულიად დეტერმინირებულ სისტემაში. აქ ჩვენ საქმე გვაქვს პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის სისტემის არამდგრად მოძრაობასთან.

სისტემის დინამიკას, რომლებშიც ხორციელდება ასეთი არამდგრადი მოძრაობანი, ეწოდება სტოქასტური დინამიურობა ანდა დეტერმინირებული (დინამიური ქაოსი).

დიდი ხნის განმავლობაში მიჩნეული იყო რომ, თუ მოცემულია ძალები, რომლებიც მოქმედებენ ნაწილაკებს შორის, ასევე ნაწილაკების საწყისი მდებარეობები და სიჩქარეები მაშინ შესაძლებელია ვიწინასწარმეტყველოთ სისტემის ყოფაქცევა დროის ნებისმიერი მომენტისათვის. ეს წარმოდგენები გაბატონებული იყო მეჩვიდმეტე-მეცხრამეტე საუკუნეში კლასიკური მექანიკის გავლენით, მაშინ მთელი სამყარო წარმოდგენილი იყო როგორც ერთი დიდი დინამიური სისტემა. ეს პოზიცია მეცნიერებაში ფორმულირებული იყო ლაპლასის მიერ და ცნობილია როგორც ლაპლასის დეტერმინიზმი.

მეცნიერების განვითარებამ და ფიზიკაში დინამიური სტოქასტურობის მიმართულების გაჩენამ აჩვენა ასეთი წარმოდგენების სიმცდარე.

თანამედროვე კომპიუტერების გამოჩენამ და მათი საშუალებით ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, რომ მოძრაობები ზოგიერთ მარტივ დინამიურ სისტემაში ყოველთვის არ შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ დროის დიდი ინტერვალში. ასეთ მოძრაობას ეწოდება ქაოსური და მის გამოსაკვლევად შეიქმნა ახალი მათემატიკური აპარატი.

კონკრეტულად, მრავალი სისტემის მოძრაობა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის სახით [1]:

$$\frac{dx}{dt} = F(x; \lambda; t) \quad (1.1)$$

სადაც  $t$  დროა,  $x(t)$  ცვლადები, რომლებიც სისტემას ახასიათებენ, ხოლო  $\lambda$  პარამეტრები რომლის ცვლილებაზეც დამოკიდებულია სისტემის ყოფაქცევა. თუ გვინდა შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა არა უწყვეტად არამედ რაღაც დროის ინტერვალებით მაშინ (1.1) განტოლებათა სისტემა იცვლება ექვივალენტურ დისკრეტულ განტოლებათა სისტემით:

$$x_{n+1} = F(x_n, \lambda) \quad (1.2)$$

სისტემის დინამიური ყოფაქცევა განისაზღვრება  $F(x, \lambda, t)$  ფუნქციის სახით. საინტერესო მოვლენები ვითარდება მაშინ, როდესაც  $F$  ფუნქციის სახე არის არაწრფივი, ხოლო ცვლადები არის ერთზე მეტი. ასეთ სისტემებში მოსალოდნელია სხვასდასხვა ტიპის ყოფაქცევა მკაცრად რეგულარულიდან და პერიოდულიდან სრულიად აპერიოდულ და ქაოსურ მოძრაობამდე.

გადასვლა ერთი ტიპის ყოფაქცევიდან მეორეზე ხდება საწყისი პირობების ანდა სისტემის მახასიათებელი პარამეტრების ცვლილებით.

ქაოსური მოძრაობა არის დინამიური სისტემის მდგომარეობის აპერიოდული ცვლილება, რომელსაც აქვს შემთხვევითი პროცესის თვისებები [2].

ამ განსაზღვრებაში დინამიური სისტემის ქვეშ იგულისხმება რეალური სისტემა (ფიზიკური, ქიმიური ან ბიოლოგიური), რომლის მახასიათებელი პარამეტრები იცვლება დროში და რაც მთავარია მისი ევოლუცია ცალსახად განისაზღვრება საწყისი პირობებით. ამ ბოლო თვისებას ეწოდება დეტერმინიზმი. დეტერმინირებული სისტემის ყოფაქცევა განისაზღვრება კანონებით, რომლებიც გამოისახება დიფერენციალურ განტოლებათა (1.1) სისტემის ანდა დისკრეტულ განტოლებათა (1.2) სისტემით, ისე რომ სისტემის ყოველი მომდევნო მდგომარეობა მკაცრად განისაზღვრება წინა მდგომარეობით. იმისათვის რომ სისტემაში წარმოიქმნას ქაოსი აუცილებელია (მაგრამ არა საკმარისი) რომ  $F$  ფუნქციის სახე (1.1) დიფერენციალურ ანდა (1.2) დისკრეტულ განტოლებათა სისტემაში იყოს საკმარისად ძლიერ არაწრფივი  $F \neq a+bx$ .

სიტყვა “აპერიოდული” ეს ნიშნავს რომ სისტემის ყოფაქცევა არ მეორდება და მიუხედავად სისტემის დეტერმინირებულობისა არ შეგვიძლია განვსაზღვროთ მისი მომავალი მდგომარეობა.

და ბოლოს “შემთხვევითი პროცესი” ეს არის პროცესი, რომელის მიმდინარეობისას დროის ნებისმიერ მომენტში დინამიური ცვლადები იღებენ მნიშვნელობებს, რომლებიც არ განისაზღვრებიან მათი წინამორბედი მნიშვნელობებით.

ქაოსის წარმოქმნა და განვითარება დამოკიდებულია თვითონ სისტემის თვისებებზე. ერთმანეთისაგან ანსხვავებენ ორი ტიპის სისტემას: კონსერვატიული, რომელშიც ენერჯია რჩება მუდმივი და დისიპაციური, რომლებშიც ენერჯია მცირდება სისტემაში ხახუნის ან ენერჯიის სხვა რაიმე გაბნევის გამო. გარე ველების არარსებობის დროს მოლეკულები და ატომები წარმოადგენენ კონსერვატიული სისტემის მაგალითს. დისიპაციური სისტემის მაგალითს წარმოადგენს გარემოში მოძრავი ქანქარა.

ყველაზე უფრო თვალსაჩინოდ ქაოსი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ კლასიკური ტრაექტორიების დახმარებით ფაზურ სივრცეში, ე.ი. სივრცეში სადაც კოორდინატთა ღერძებზე გადაზომილია სისტემის კოორდინატები და იმპულსები [4]. თუ სისტემის მოძრაობა ხდება რაღაც ძალების გავლენით მისი მახასიათებელი კოორდინატები და იმპულსები არიან დროის ფუნქციები

$$q_i = q_i(t), p_i = p_i(t), i = 1 \dots N.$$

სისტემის მდგომარეობა დროის მოცემულ მომენტში აღიწერება წერტილით ფაზურ სივრცეში, ხოლო მოძრაობა ტრაექტორიით ფაზურ სივრცეში.

ყოველი მოძრაობის საწყისი პირობები შეიძლება ერთმანეთისაგან განსხვავებული იყოს, ყოველ საწყის წერტილს შეესაბამება მისგან გამომავალი ტრაექტორია.

ავლნიშნოთ  $x(t)$ -თი სისტემის მახასიათებელი კოორდინატები და იმპულსები. თუ მოძრაობა ქაოსურია ნებისმიერი ორი ტრაექტორია, რომლების ერთმანეთთან იყო ძალიან ახლოს იწყებს ერთმანეთისაგან დაშორებას შემდეგი კანონით:

$$|x(t) - x'(t)| \sim \exp(Lt) \quad (1.3)$$

სადაც  $L$  ექსპონენტის მაჩვენებელი წარმოადგენს ქაოსის რაოდენობრივ მახასიათებელს და ეწოდება ლიაპუნოვის მაჩვენებელი.

ქაოსური ტრაექტორიების ექსპონენციალურად დაშორების ეფექტს უწოდებენ მგრძობიარობას საწყისი პირობების მიმართ ანდა როგორც მას უწოდებენ “პეპელას” ეფექტი. ეს სახელწოდება შემოთავაზებული იყო მეტეოროლოგ ე. ლორენცის მიერ [5], რომელმაც აღმოაჩინა დეტერმინირებული ქაოსი.

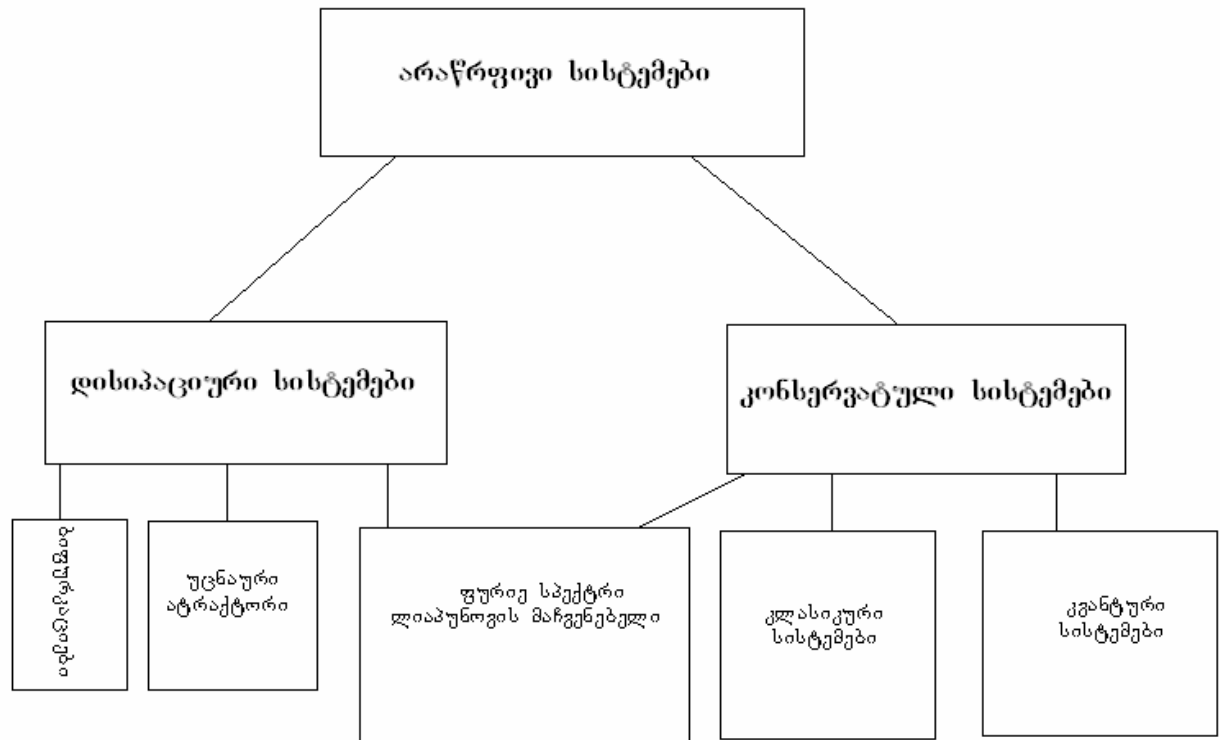
განტოლებები, რომლებიც აღწერდნენ დედამიწის ატმოსფეროში ჰაერის ნაკადებს იყო ძალიან მგრძობიარე საწყისი პირობების მიმართ. ასე მაგალითად პეპლის ფრთების დაქნევამ დედამიწის ერთ ნაწილში პრინციპში რაღაც დროის შემდეგ შეიძლება გამოიწვიოს ქარიშხალი დედამიწის სხვა ნაწილში. ეს იმას ნიშნავს, რომ ამინდის ზუსტი წინასწარმეტყველება დიდი დროის განმავლობაში შეუძლებელია.

ექსპონენციალურად დაშორებად ტრაექტორიებს შორის მანძილი არ შეიძლება უსასრულოდ გაიზარდოს, რადგანაც ნებისმიერი სისტემის ენერგია სასრულია და ფაზური სივრცე შემოსაზღვრულია, ამიტომაც ერთმანეთისაგან დაშორებული ტრაექტორიები აირეკლებიან ფაზური სივრცის საზღვარზე და სწრაფად ჩაიხლართებიან და ქმნიან აბსოლიტურად ქაოსური მოძრაობის სურათს.

რთული სისტემების ქცევის საწყის პირობებზე დამოკიდებულება არაწრფივი დინამიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური დებულებაა. იგი ლაპლასის დეტერმინიზმის საპირისპიროდ ეფუძნება იმ მოსაზრებას, რომ ბუნებრივი სისტემის საწყისი მდგომარეობის უსასრულოდ ზუსტად განსაზღვრა და შესაბამისად სისტემის შემდგომი ქცევის ზუსტი წინასწარმეტყველება შეუძლებელია. ეს ჯერ კიდევ პუანკარემ შენიშნა 20-საუკუნის დასაწყისში [6]. იგი აღნიშნავდა რომ რთულ სისტემებში “მცირე ცვლილებები აწმყოში იწვევენ მნიშვნელოვან ცვლილებებს მომავალში”. პუანკარეს დაკვირვებით თუნდაც იდეალური გაზომვებისას, გარდაუვალი მცირე ცდომილებები აიჯამებიან, რის შედეგადაც ბუნებრივი პროცესების მომავლის პროგნოზირება გარკვეული დროის შემდეგ შეუძლებელი ხდება.

ქვემოთ მოცემულია არაწრფივი სისტემების კლასიფიკაცია რომელშიც დაიშორება დინამიური ქაოსი. როგორც ამ სქემიდან ჩანს ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ დინამიური ქაოსი დისიპაციურ სისტემებში (ამის მაგალითს წარმოადგენს ქანქარა რომელზეც მოქმედებს გარე მაიძულებელი ძალა და ხახუნის ძალა) და კონსერვატიულ ანუ ჰამილტონური სისტემები (ამის მაგალითია არაწრფივი ქანქარა, პლანეტების მოძრაობა რომელთა მოძრაობაც აღიწერება ჰამილტონის განტოლებებით).





## 1.2 ქაოსი დისიპაციურ სისტემებში

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სისტემის ქაოსური მოძრაობა შეიძლება აღმოვაჩინოთ როგორც დისიპაციურ, ასევე კამილტონურ სისტემებში.

ერთ-ერთი მარტივი მაგალითი დისიპაციური სისტემისა, რომელიც ავლენს ქაოსურ ყოფაქცევას, არის როტატორი ჩახშობით, რომელზეც მოქმედებს პერიოდული ბიძგები. ამ როტატორის მოძრაობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად [3]:

$$\dot{\phi} + \Gamma \phi = F = Kf(\phi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (1.4)$$

სადაც  $\Gamma$  ჩახშობის მუდმივია,  $T$  ბიძგებს შორის პერიოდი,  $F$  გარე მაძიულებელი ძალა.

თუ შემოვიტანთ ახალ ცვლადებს  $x = \phi$ ,  $y = \dot{\phi}$ ,  $z = t$ , მაშინ (1.4) შეიძლება გადაიწეროს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\dot{x} = y;$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + Kf(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT); \quad (1.5)$$

$$\dot{z} = 1;$$

(1.5) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებით შეგვიძლია ის დავიყვანოთ ორგანზომილებიან ასახვამდე:  $(x_n, y_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x(nT - \varepsilon), y(nT - \varepsilon)]$ ,

ვუძებნოთ (1.5) მეორე განტოლების ზოგადი ამონხსნი  $nT - \varepsilon < t < (n+1)T - \varepsilon$  ინტერვალში შემდეგნაირად:  $y = A(t)e^{-\Gamma t}$ . (1.6)

(1.6)-ის (1.5)-ის მეორე განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ:

$$A(t) = A(nT) + \int_{nT - \varepsilon}^t F(t') e^{-\Gamma t'} dt' \quad (1.7)$$

(1.7)-დან მივიღებთ :

$$y(t) = A(t)e^{-\Gamma t} = A(nT)e^{-\Gamma t} + \int_{nT-\varepsilon}^t F(t')e^{\Gamma(t'-t)} dt' \quad (1.8)$$

$$= y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + \int_{nT-\varepsilon}^t F(t')e^{\Gamma(t'-t)} dt'$$

(1.5)-ის გამოყენებით (1.8)-დან გვექნება:

$$y(t) = (y_n + Kf(x_n))e^{-\Gamma(t-nT)} \quad (1.9)$$

როცა  $t = (n+1)T$  მაშინ  $y(t) = y((n+1)T) = y_{n+1}$  და (1.9)-დან:

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + Kf(x_n)]$$

ანალოგიურად, (1.5) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლებიდან მივიღებთ:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1-e^{-\Gamma T}}{T} (y_n + Kf(x_n)) \quad (1.10)$$

ამგვარად მივიღეთ ასახვა:

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + Kf(x_n)] \quad (1.11)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1-e^{-\Gamma T}}{\Gamma} [y_n + Kf(x_n)]$$

**კვადრატული ასახვა.** ეს ასახვა მიიღება (1.11) ასახვიდან ძლიერი ჩახშობის დროს, როცა  $\Gamma \rightarrow \infty$  და  $K \rightarrow \infty$  ისე რომ  $\frac{\Gamma}{K} \rightarrow 1$ , მაშინ  $y_n \rightarrow \infty$  და

$x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ . თუ ავიღებთ, რომ  $f(x_n) = (r-1)x_n - rx_n^2$ , მაშინ მივიღებთ კვადრატულ ასახვას:

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (1.12)$$

(1.12) განტოლება შეიძლება გამოყენებულ იქნას პოპულაციის დინამიკისათვის ჩაკეტილ გარემოში. ვთქვათ  $x_n$  არის პოპულაციის რაოდენობა  $n$  წელიწადს ჩაკეტილ გარემოში (მაგალითად კუნძულზე). მაშინ  $x_{n+1}$  დამოკიდებული იქნება პოპულაციის რაოდენობაზე წინა წელს ანუ  $x_n$ -ზე, აგრეთვე სასიცოცხლო გარემოს თავისუფალ ნაწილზე, რომელიც პროპორციულია  $(1-x_n)$ -ის. ე.ი.  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ , სადაც  $r$  განსაზღვრება პოპულაციის განვითარების ტემპით, სიკვდილიანობით, გარემო ფაქტორებით და ა. შ.

თითქოსდა  $x_n$  მნიშვნელობები უნდა მიისწრაფოდნენ რაღაც საშუალო მნიშვნელობისაკენ, მაგრამ როგორც აჩვენეს გროსმანმა და ტომემ (Grossmann, Thomae, 1977) [7], ფეიგენბაუმმა (Feigenbaum, 1978) [8,9], კოლემ და ტრესერმა (Collet, Tresser, 1978) [10], ლოგისტიკური ასახვის იტერაციები  $x_1, x_2, \dots, x_n$  გარე  $r$  პარამეტრის ცვლილებისას ავლენენ საკმაოდ რთულ ყოფაქცევას, რომელიც ხდება ქაოსური  $r$ -ის რაღაც მნიშვნელობიდან დაწყებული.

შემოვიტანოთ ასახვის უძრავი წერტილის ცნება.  $x_{n+1} = f(x_n)$  ასახვის უძრავი წერტილი ეწოდება ისეთ  $x^*$  წერტილს, რომლისთვისაც  $x^* = f(x^*)$  ანუ  $x_n^* = f(x_n^*) = x_{n+1}^*$ .

ვიპოვოთ (1.12) ასახვის უძრავი წერტილები:  $x^* = rx^*(1-x^*)$ , საიდანაც  $x_1^* = 0$  და  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ . რადგანაც  $x \geq 0$ , ამიტომ როცა  $r < 1$  გვაქვს ერთი  $x_1^* = 0$  უძრავი

წერტილი, როცა  $r > 1$ , მაშინ გვაქვს მეორე უძრავი წერტილიც:  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ .

გავარკვიოთ უძრავ წერტილთა მდგრადობის საკითხი. საერთოდ უძრავ  $x^*$  წერტილს ეწოდება  $x_{n+1} = f(x_n)$  ასახვის მდგრადი წერტილი, თუ მისი მახლობელი ყოველი  $x_0$  წერტილი მიიზიდება  $x^*$ -სკენ, ანუ იტერაციათა მიმდევრობა  $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f \dots f(x_0))$  იკრიბება  $x^*$ -კენ.

დავადგინოთ უძრავ წერტილთა მდგრადობის კრიტერიუმი. ავღნიშნოთ მანძილი  $x_n$  წერტილიდან  $x^*$ -მდე  $\delta_n$ -ით. მაშინ გვაქვს:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| = |f(x^* + \delta_n) - x^*| = \\ &= \left| \frac{f(x^* + \delta_n) - x^*}{\delta_n} \right| \delta_n = |f'(x^*)| \delta_n. \end{aligned} \quad (1.13)$$

აქედან  $\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = |f'(x^*)|$ , როდესაც  $|f'(x^*)| < 1$  მაშინ  $\delta_{n+1} < \delta_n$ , ე.ი.  $n$ -ის გაზრდით მანძილი  $x_n$  წერტილსა და  $x^*$  უძრავ წერტილს შორის კლებულობს და  $x^*$  წერტილი არის მდგრადი უძრავი წერტილი, როდესაც  $|f'(x^*)| > 1$ , მაშინ  $\delta_{n+1} > \delta_n$ , ე.ი.  $n$ -ის გაზრდით მანძილი  $x_n$  წერტილსა და  $x^*$  წერტილს შორის იზრდება და  $x^*$  წერტილი ხდება არამდგრადი.

კვადრატული ასახვისათვის  $f(x) = rx(1-x)$  და  $f'(x) = r(1-2x)$ . უძრავ წერტილებში:

$$f'(x_1^*) = r \text{ და } f'(x_2^*) = (2-r).$$

როცა  $r < 1$ , მაშინ  $|f'(x_1^*)| < 1$  და  $|f'(x_2^*)| > 1$ , ე.ი.  $x_1^*$  მდგრადია, ხოლო  $x_2^*$  არამდგრადი.

როცა  $1 < r < 3$  მაშინ  $|f'(x_1^*)| > 1$  და  $|f'(x_2^*)| < 1$  ე.ი.  $x_1^*$  წერტილი ხდება არამდგრადი, ხოლო  $x_2^*$  წერტილი მდგრადი.

როცა  $r > 3$ , მაშინ  $|f'(x_1^*)| > 1$  და  $|f'(x_2^*)| > 1$  ე.ი. ორივე წერტილი ხდება არამდგრადი.

რა ხდება ამის შემდეგ? ამისათვის განვიხილოთ მეორე იტერაციაზე  $f(x)$ -თან ერთად  $f^2(x) = f(f(x))$ .

თუ  $x^*$  უძრავი წერტილია  $f(x)$ -თვის მაშინ ის უძრავი დარჩება უფრო მაღალი იტერაციებისთვისაც. მართლაც, თუ  $f(x^*) = x^*$ , მაშინ

$$f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*, \quad f^3(x^*) = f(f(f(x^*))) = f(f^2(x^*)) = f(x^*) = x^*.$$

საზოგადოდ, თუ  $f^{n-1}(x^*) = x^*$  გამოდის, რომ  $f^n(x^*) = f(f^{n-1}(x^*)) = f(x^*) = x^*$ .

თუ უძრავი წერტილი  $x^*$  არის არამდგრადი წერტილი  $f(x)$ -ის მიმართ, ის ხდება არამდგრადი  $f^2$  და უფრო მაღალი იტერაციების მიმართ. მართლაც,  $|f'(x^*)| > 1$  პირობიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$|f^{2'}(x^*)| = |f'(f(x^*))| = |f'(f(x^*)) \cdot f'(x^*)| = |f'(x^*)|^2 > 1.$$

$x^*$  წერტილი, რომელიც იყო მდგრადი უძრავი წერტილი  $f^2$ -სთვის, როცა  $r < 3$ ,  $r > 3$  შემთხვევაში ხდება არამდგრადი და ჩნდება ორი ახალი უძრავი წერტილი. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ეს ორი ახალი უძრავი წერტილი ამოვხსნათ განტოლება:

$$x = f^2(x) = f(f(x)), \quad (1.14)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$x = r^2 x(1-x)(1-rx(1-x)). \quad (1.15)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ  $x=0$  და  $x=1-\frac{1}{r}$  არიან უძრავი წერტილები,

(1.15)-დან მივიღებთ განტოლებას  $x_3$  და  $x_4$  უძრავი წერტილების განსასაზღვრავად:

$$r^2 x^2 - r(r+1)x + (1+r) = 0. \quad (1.16)$$

ამ განტოლების დისკრიმინანტია:  $D = r^2(1+r)(r-3)$

საიდანაც ჩანს, რომ ამ განტოლებას ამონახსნი მაშინ აქვს, როცა  $r > 3$ , ე.ი. როცა  $r < 3$   $f^2(x) = x$  განტოლებას აქვს ორი უძრავი წერტილი  $x_1 = 0$  და

$x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ , ხოლო როცა  $r > 3$  გაუჩნდება კიდევ ორი უძრავი წერტილი:

$$x_3 = \frac{(r+1) - \sqrt{(1+r)(r-3)}}{2r}; \quad x_4 = \frac{(r+1) + \sqrt{(1+r)(r-3)}}{2r}. \quad (1.17)$$

ადვილია იმის დანახვა, რომ  $f(x)$  ასახვას ეს ორი წერტილი გადაჰყავს ერთმანეთში, ე.ი.  $f(x_3) = x_4$  და  $f(x_4) = x_3$ .

მართლაც,  $x_3 = f^2(x_3)$  და  $x_4 = f^2(x_4)$ .  $f^2(f(x_3)) = f(f^2(x_3)) = f(x_3)$ , ე.ი.

$f(x_3)$  არის უძრავი წერტილი  $f^2$  ასახვისთვის, მაგრამ ასეთი წერტილი შეიძლება იყოს  $x_4$ ,  $x_1$  და  $x_2$  ვერ იქნება, რადგანაც:

$f^2(x_1) = x_1$  და  $f^2(x_2) = x_2$ . აქედან გამომდის, რომ  $f(x_3) = x_1$  ან  $f(x_3) = x_2$ , ეს

კი ეწინააღმდეგება ტოლობას  $f(x_1) = x_1$  და  $f(x_2) = x_2$ . დარჩა ერთადერთი შემთხვევა  $f(x_3) = x_4$ . ანალოგიურად შეიძლება იმის დამტკიცება რომ

$f(x_4) = x_3$ . ესე იგი მივიღეთ რომ  $f(x_3) = x_4$  და  $f(x_4) = x_3$ . გამოვიკვლოთ ამ

წერტილების მდგრადობის საკითხი:  $f^{2'}(x_3) = f'(f(x_3)) \cdot f'(x_3) = f'(x_4) \cdot f'(x_3)$ .

$f^{2'}(x_4) = f'(f(x_4)) \cdot f'(x_4) = f'(x_3) \cdot f'(x_3)$ , აქედან გამოვიდა  $f^{2'}(x_3) = f^{2'}(x_4)$ ,

ესე იგი ეს ორი წერტილი ერთდროულად იქნეს და კარგავს მდგრადობას.

ვიპოვოთ  $x_3$  და  $x_4$  წერტილების მდგრადობის კრიტერიუმი. ამ წერტილების მდგრადობისათვის აუცილებელია რომ  $|f^{2'}(x_3)| = |f^{2'}(x_4)| = |f'(x_3)f'(x_4)| < 1$ .

(1.17) გამოსახულებების გამოყენებით მივიღებთ:

$$|f'(x_3) \cdot f'(x_4)| = |r^2(1-2x_3)(1-2x_4)| = |1-(1+r)(r-3)| < 1 \quad (1.18)$$

რომლის ამოხსნით მივიღებთ რომ  $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ . ე.ი. ამ დროს ხდება პერიოდის გაორმაგება.

შევაჯამოთ მიღებული შედეგები:

1) როცა  $r < 1$  სისტემას აქვს ერთი მდგრადი წერტილი  $x_1 = 0$  და ერთი

$$\text{არამდგრადი } x_2 = 1 - \frac{1}{r};$$

2) როცა  $1 < r < 3$ , მაშინ  $x_1$  ხდება არამდგრადი და  $x_2$  წერტილი მდგრადი;

3) როცა  $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ , მაშინ ხდება პერიოდის გაორმაგება სისტემაში ანუ ხდება პირველი ბიფურკაცია. წარმოიქმნება ორი მდგრადი წერტილი  $x_3$  და  $x_4$ ,  $f^2(x)$  ასახვის 2 პერიოდით  $f(x_3) = x_4$  და  $f(x_4) = x_3$ , ანუ წარმოიქმნება 2 პერიოდიანი ატრაქტორი. ეს იმას ნიშნავს რომ ნებისმიერი იტერაცია  $[0,1]$  შუალედზე ოსცილირებს და მიიზიდება  $x_3$  და  $x_4$  წერტილებისაკენ.

როცა  $r > 1 + \sqrt{6}$ , მაშინ  $x_3$  და  $x_4$  წერტილები კარგავენ მდგრადობას. ამ დროს  $f^4(x)$  ასახვას უჩნდება ოთხი მდგრადი უძრავი წერტილი:  $\bar{x}_1^*$ ,  $\bar{x}_2^*$ ,  $\bar{x}_3^*$ ,  $\bar{x}_4^*$ , ისეთი, რომ  $f(\bar{x}_1^*) = \bar{x}_2^*$ ,  $f(\bar{x}_2^*) = \bar{x}_3^*$ ,  $f(\bar{x}_3^*) = \bar{x}_4^*$  და  $f(\bar{x}_4^*) = \bar{x}_1^*$ , ე.ი. იტერაციების ნებისმიერი თანმიმდევრობა საბოლოო ჯამში ამ ოთხ წერტილთაგან ერთ-ერთს დაემთხვევა და შემდგომ აღარ მოსცილდება  $(\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, \bar{x}_3^*, \bar{x}_4^*)$  წერტილთა ჯგუფს ანუ მიიღება 4 პერიოდიანი ატრაქტორი,

ადგილი აქვს პერიოდის გაორმაგებას ანუ იკვრება  $4 = 2^2$  ციკლი და ა.შ.

ზოგადად ვასკენით რომ:  $r_{n-1} < r < r_n$ -თვის გვაქვს მდგრადი  $2^{n-1}$  ციკლი:

$(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{2^{n-1}-1}^*)$ , რომელსაც ასახვით შემდეგი თვისებები:

$$f(x_i^*) = x_{i+1}^*, \quad f^{2^{n-1}}(x_i^*) = x_i^*, \quad \left| \frac{d}{dx_i^*} f^{2^{n-1}}(x_i^*) \right| = \left| \prod_i f'(x_i^*) \right| < 1 \quad (1.19)$$

$r = r_n$ -თვის ხდება გაორმაგების ბიფურკაცია, რაც გამოიხატება იმაში, რომ  $2^{n-1}$  ციკლის ყველა წერტილი ხდება არამდგრადი და ჩნდება  $2^n$  ციკლი. ამგვარად პერიოდის გაორმაგების, გაოთხმაგების, გარვაგების, გათექვსმეტმაგების და ა.შ. გზით საბოლოოდ რაღაც  $r_\infty < 4$  მნიშვნელობაზე ვიღებთ  $x$ -ის ქაოსურ ყოფაქცევას, თუმცაღა სრულყოფილი ქაოსი, როცა  $x$ -ის მნიშვნელობები ქაოსურად მთელ  $[0,1]$  ინტერვალს ავსებენ მიიღება  $r = 4$  მნიშვნელობისათვის.  $r_\infty < f < 4$  მნიშვნელობებისათვის  $x$ -ის ყოფაქცევა მართალია ქაოსურია, მაგრამ იგი  $[0,1]$  ინტერვალთან ყველა მნიშვნელობებს ვერ იღებს. ამგვარი გზით ქაოსურ რეჟიმში გადასვლის სცენარს უწოდებენ ფეიგენბაუმის სცენარს.

$r$  ბიფურკაციული მნიშვნელობების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისება არის ის, რომ ისინი ქმნიან ზრდად მიმდევრობას, რომელსაც იკრიბება  $r_\infty$

მნიშვნელობისაკენ:  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r_\infty$ .

$r_\infty$ -ის მნიშვნელობა შეიძლება ნაპოვნი იქნას რიცხვითად [11-13]:  
 $r_\infty = 3.569945672\dots$

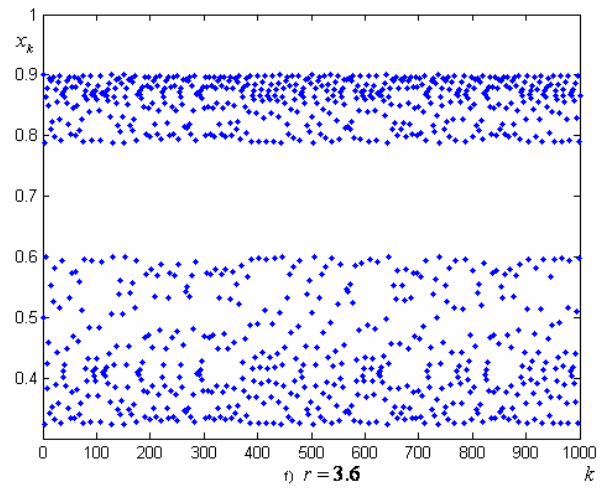
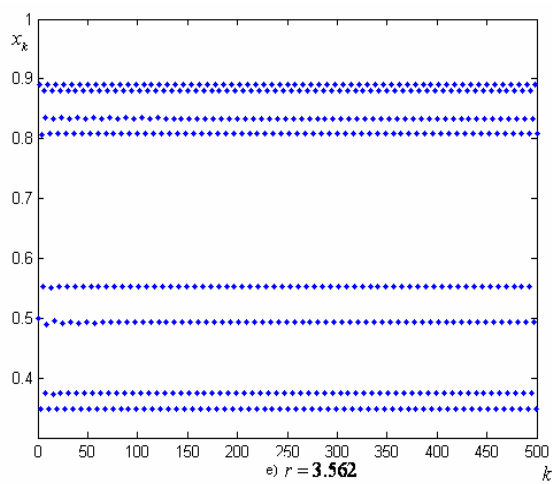
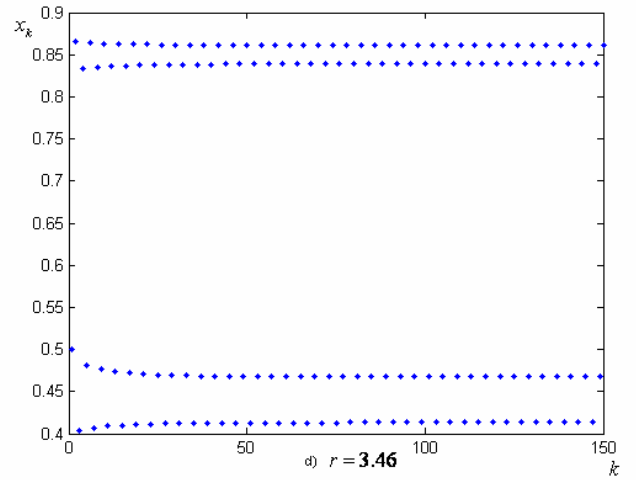
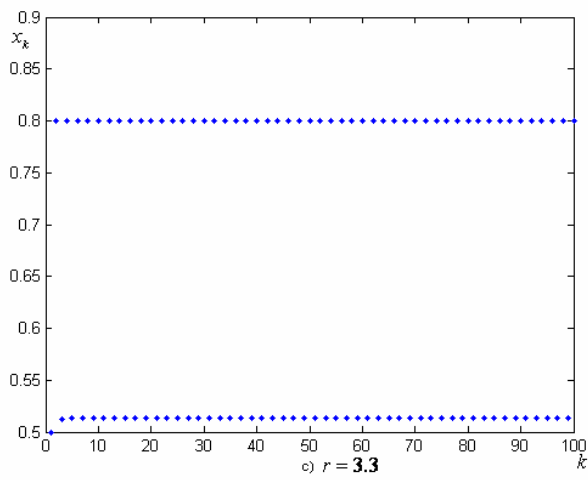
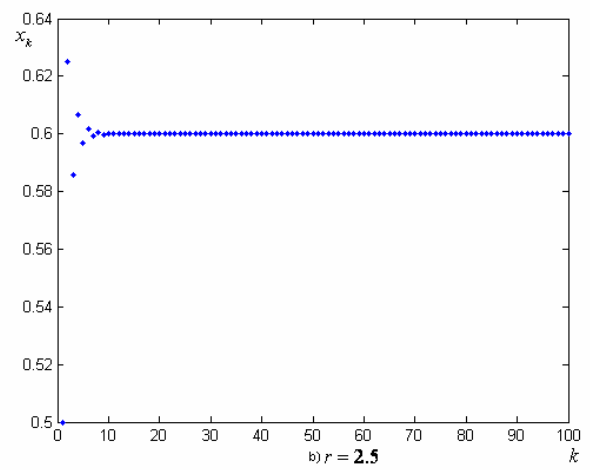
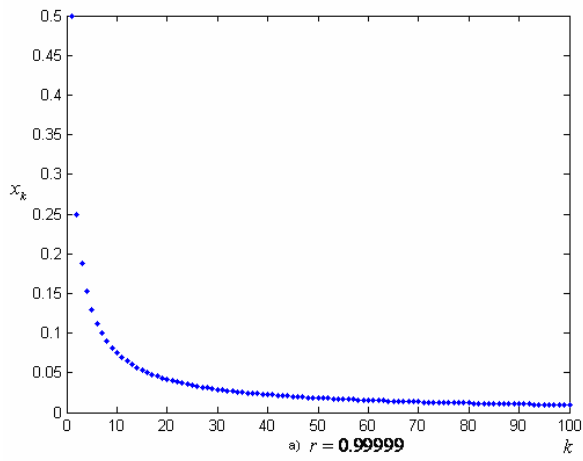
ატრაქტორის პერიოდი	$r_k$ -ს მნიშვნელობა ბიფურკაციის წერტილში
$1 \cdot 2^0 = 1$	$r_1 = 3$ $r_2 = 3.44948\dots$ $r_3 = 3.54408\dots$ $r_4 = 3.56872\dots$ $r_5 = 3.5698912\dots$ $r_6 = 3.5699340\dots$ $r_\infty = 3.569945672\dots$
$1 \cdot 2^1 = 2$	
$1 \cdot 2^2 = 4$	
<b><math>1 \cdot 2^3 = 8</math></b>	
<b><math>1 \cdot 2^4 = 16</math></b>	
<b><math>1 \cdot 2^5 = 32</math></b>	
.....	
$1 \cdot 2^\infty = \infty$	

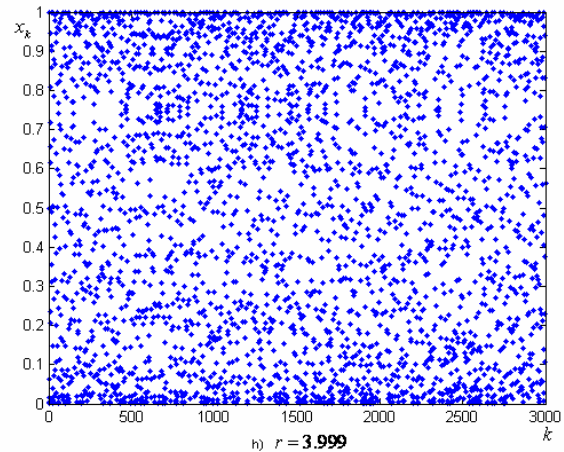
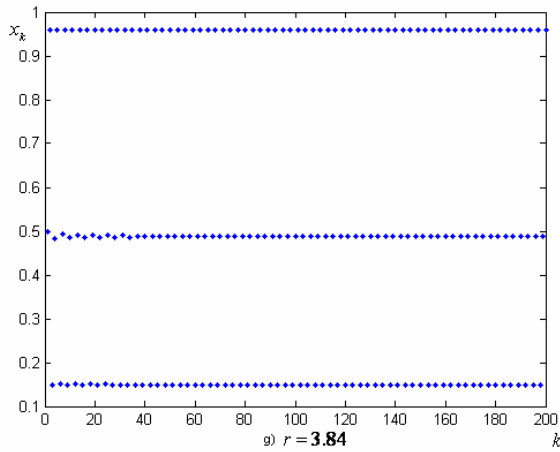
ცხრილი 1.1.  $r_k$ -ს რამდენიმე პირველი ბიფურკაციული მნიშვნელობა.

$r_k$  რიცხვები, რომელთა რამდენიმე პირველი მნიშვნელობა წარმოდგენილია 1.1 ცხრილში, ექვემდებარება შემდეგ კანონზომიერებას:  $r$ -ის იმ მნიშვნელობათა სხვაობა, რომლებიც შეესაბამება ორ ერთმანეთის მომდევნო ბიფურკაციას,

მცირდება თითქმის მუდმივი კოეფიციენტით [9]:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = \delta$ .

$\delta$ - რიცხვს ეწოდება ფეიგენბაუმის უნივერსალური მუდმივა [9]. ის არ არის დამოკიდებული ასახვის არჩევაზე. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციები არის უნივერსალური. იგივე ბიფურკაციული სურათი დაიმზირება ნებისმიერი წერტილოვანი ასახვისათვის ერთადერთი მაქსიმუმით, რომელიც აპროქსიმირდება კვადრატული ფუნქციით მაქსიმუმის წერტილში, ე.ი. ქაოსში გადასვლა აქვს უნივერსალური ხასიათი. ბოლოს მოვიყვანოთ რიცხვითი შედეგები.





ნახ. 1.1 ქაოსში გადასვლის ფეიგენბაუმის სცენარი.  $x$  ღერძზე გადაზომილია ინტერაციების რაოდენობა  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$  ასახვისათვის,  $y$  ღერძზე გადაზომილია  $x_n$  მნიშვნელობები. ნახაზები აგებულია  $r$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის *a)*  $r = 0.99999$  ამ შემთხვევაში გვაქვს ერთი მდგრადი წერტილი  $x = 0$  და  $x_n$  მნიშვნელობები მიიზიდება ამ მდგრადი წერტილისაკენ;

*b)*  $r = 2.5$ ,  $x = 0$  წერტილი კარგავს მდგრადობას და სისტემას უზნდება ახალი მდგრადი წერტილი  $x = 1 - \frac{1}{r} = 0.6$ ,  $x_n$  მნიშვნელობები მიიზიდებიან ამ წერტილისაკენ; *c)*  $r = 3.3$ , ხდება პერიოდის გაორმაგება  $x = 0$  და  $x = 1 - \frac{1}{r} = 0.6$  წერტილები კარგავენ მდგრადობას, სამაგიეროდ ჩნდება ახალი

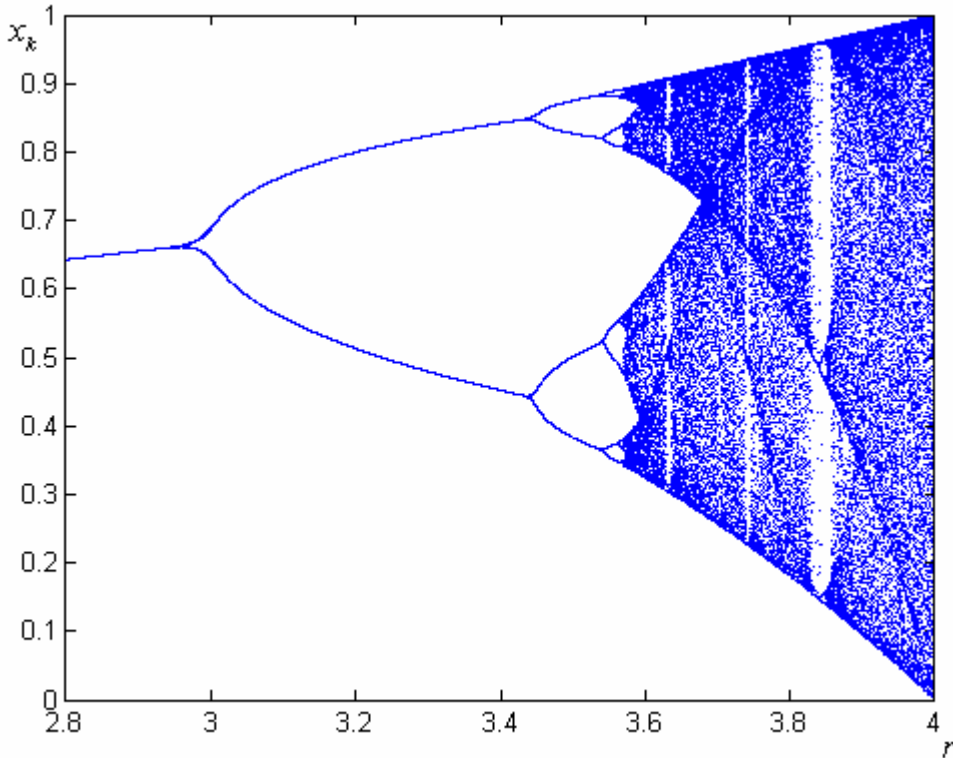
ორი მდგრადი წერტილი  $x_3 = \frac{(r+1) - \sqrt{(1+r)(r-3)}}{2r} \approx 0.52$ ; და

$$x_4 = \frac{(r+1) + \sqrt{(1+r)(r-3)}}{2r} \approx 0.82;$$

*d)*  $r = 3.46$  და *e)*  $r = 3.562$  ხდება შესაბამისად პერიოდის გაოთხმაგება და გარვამაგება, *f)*  $r = 3.6$ , ამ შემთხვევაში  $r > r_\infty$ , ხდება ქაოსში გადასვლა, თუმცა  $x_n$  მნიშვნელობები მთლიანად არ ავსებენ  $[0,1]$  ინტერვალს, *g)*  $r = 3.84$  პერიოდული ყოფაქცევის ფანჯარა ქაოსური ყოფაქცევის რეჟიმში.  $[r_\infty, 4]$  ინტერვალის რაღაც ქვეარეგში,  $x_n$  ასახვის ქაოსური ყოფაქცევა შეიძლება შეიცვალოს რეგულარულით. ამ სურათზე ადგილი აქვს პერიოდის გასამმაგებას. რეგულარული ყოფაქცევის ფანჯრები კარგად ჩანს ნახ.1.2.

*h)*  $r = 3.999$ , როგორც ამ სურათიდან ჩანს გვაქვს სრული ქაოსი  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$  ასახვისათვის,  $x_n$  მნიშვნელობები ქაოსურად ავსებენ  $[0,1]$  ინტერვალს.



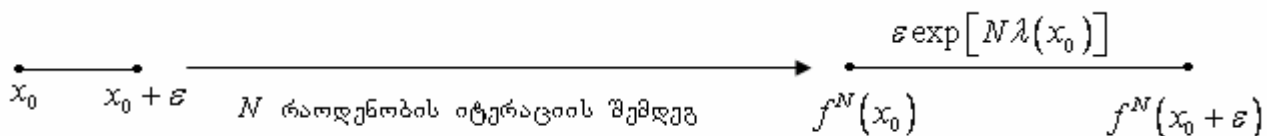


ნახ. 12. ასიმპტოტური იტერაციები  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$  ასახვისათვის, როცა  $r \in [2.8; 4]$ ; ნახაზზე ნახვენებია  $x_n$  მნიშვნელობების  $r$  პარამეტრზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ნახაზზე ჩანს რომ  $r$  პარამეტრის ცვლილებისას ხდება სხვადასხვა პერიოდების ატრაქტორების გაჩენა, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფილნი არიან ბიფურკაციებით, რომლებსაც მივყავართ პერიოდის გაორმაგებამდე. ამ ბიფურკაციების კასკადს აქვს დაგროვების წერტილი  $r_\infty = 3.569945672\dots$ , რომლის შემდეგ პერიოდული და აპერიოდული ატრაქტორები ერთმანეთს ენაცვლება ანუ გვაქვს რეგულარული ყოფაქცევის ფანჯრები ქაოსური ყოფაქცევის არეებში:  $r \approx 3.75$  მნიშვნელობის მიდამოში საკმაოდ კარგად ჩანს ფანჯარა სადაც შეიძლება დაიმზიროს ატრაქტორი პერიოდით ხუთი, ხოლო  $r \approx 3.84$  მიდამოში გვაქვს ფანჯარა, სადაც შეიძლება დაიმზიროს ატრაქტორი პერიოდით სამი.

ბოლოს ავღნიშნოთ, რომ ლოგისტიკური ასახვის შესახებ დაწვრილებით თეორიას მკითხველი შეიძლება გაეცნოს [9] სტატიაში, აგრეთვე [11-14] მონოგრაფიებში.

**ლიაპუნოვის მაჩვენებელი.** ვთქვათ მოცემული გვაქვს წერტილოვანი ასახვა:

$x_n = f(x_n)$ . ლიაპუნოვის მაჩვენებელი გვიჩვენებს ამ ასახვის შედეგად თავდაპირველად მეზობლად მყოფი  $x_0$  და  $x_0 + \varepsilon$  წერტილების ექსპონენციალურად ურთიერთდაშორების ან ურთიერთდაახლოების ხარისხს. მოცემულ  $x_0$  წერტილში ლიაპუნოვის მაჩვენებელი შემდეგნაირად გამოითვლება [3]:



$$\text{ამ ნახაზის მიხედვით გვექნება: } \varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = [f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)] \quad (120)$$

რომელიც ზღვარში, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  გვაძლევს ზუსტ ფორმულას  $\lambda(x_0)$ -სთვის:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \left| \ln \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad (1.21)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $e^{\lambda(x_0)}$ -ეს არის გაჭიმვის კოეფიციენტი. ის გვიჩვენებს, თუ საშუალოდ რამდენჯერ იზრდება ერთი იტერაციის შემდეგ მანძილი ორ მეზობელ მახლობელ წერტილს შორის.

როცა  $\lambda < 0$ , მაშინ საწყის მომენტში მეზობლად მყოფი ნებისმიერი ორი წერტილი იტერაციათა შედეგად კიდევ უფრო უახლოვდება ერთმანეთს. ამ დროს გვექნება სტაციონალური მოძრაობა. როცა  $\lambda > 0$ , ადგილი აქვს მეზობელი წერტილების ექსპონენციალურ ურთიერთდაშორებას, ანუ დასაწყისში მახლობელ წერტილთა ექსპონენციალურ გაშლას. ამ დროს გვექნება ქაოსური ყოფაქცევა – საწყის მომენტში სულ მცირე ფლუქტუაციაც კი დროითი ევოლუციის შედეგად კი არ ჩაქრება, არამედ ექსპონენციალურად გაძლიერდება.  $\lambda = 0$  არის ბიფურკაციული მნიშვნელობა. ამ დროს მანძილი მეზობელ წერტილებს შორის არ შეიცვლება დროითი ევოლუციის შედეგად. ეს არის არამდგრადი, პრაქტიკულად განუხორციელებელი შემთხვევაა.

როგორი იქნება ლიაპუნოვის მაჩვენებელი  $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$  კვადრატული ასახვისათვის?

ამისათვის გავიხსენოთ რომ ნებისმიერი სახის ასახვისათვის:

$$\frac{d}{dx} f^2(x) \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} f[f(x)] \Big|_{x=x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0), \quad x_1 \equiv f(x_0);$$

$$\frac{df^N(x_0)}{dx} = \left\{ f' [f [f \dots f(x)]] \right\} = \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \quad (1.22)$$

გადავწეროთ ლიაპუნოვის მაჩვენებელი შემდეგი სახით:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

კვადრატული ასახვისათვის  $f'(x_i) = 2(1-2x_i)$ , ამიტომაც გვექნება:

$$\lambda(x_0) = \ln(r) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |1-2x_i| \quad (1.24)$$

განვიხილოთ  $r$ -ის სხვადასხვა ინტერვალთა შესაბამისი შემთხვევები:

ა)  $0 \leq r \leq 1$  ამ დროს, როგორც ვიცით, კვადრატულ ასახვას გააჩნია ერთადერთი უძრავი წერტილი  $x_1^* = 0$  და იგი მდგრადია, ამიტომაც იტერაციათა სასრული რაოდენობის შემდეგ საბოლოოდ ამ წერტილში მივდივართ, სადაც ლოგარითმი ნულის ტოლია. რადგან ამ სასრული რაოდენობის იტერაციებისას ლოგარითმი არსად უსასრულობა არ ხდება ამიტომაც (1.24)-ში ზღვარი ნულის ტოლი გამოვა და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ  $\lambda(x_0) = \ln(r)$  ე.ი განხილულ არეში ლიაპუნოვის მაჩვენებელი ყველგან უარყოფითია გარდა  $r=1$ -ის შესაბამისი შემთხვევისა, როცა  $\lambda = 0$ . ეს მართლაც ასე უნდა იყოს, რადგან  $0 < r < 1$  ინტერვალში სტაბილური მდგომარეობა გვაქვს, ხოლო  $r=1$  წარმოადგენს კვადრატული ასახვის ბიფურკაციულ მნიშვნელობას.

ბ)  $1 < r \leq 3$ , ამ შემთხვევაში ერთადერთი მდგრადი უძრავი წერტილია  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ .

აქაც სასრული რაოდენობის იტერაციებს ისევ  $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ -სკენ მივყავართ,

ამიტომაც გვექნება რომ:  $\lambda(x_0) = \ln(r) + \ln\left|1 - 2\left(\frac{r-1}{r}\right)\right| = \ln|2-r|$ . ამ შუალედშიც

ლიაპუნოვის მაჩვენებელი ყველგან უარყოფითია, გარდა  $r=3$  წერტილისა სადაც ის ნულის ტოლია,  $r=2$  კი გვაქვს, რომ  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

გ)  $3 < r \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3.45$  ამ შემთხვევაში  $f$  ასახვას მდგრადი უძრავი წერტილი აღარა აქვს, მაგრამ სამაგიეროდ ორი მდგრადი უძრავი წერტილი უჩნდება  $f^2$

ასხავას:  $x_{3,4}^* = \frac{r+1}{2r} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{r-3}{r+1}} \right]$ . ამიტომაც სასრული რაოდენობის იტერაციების

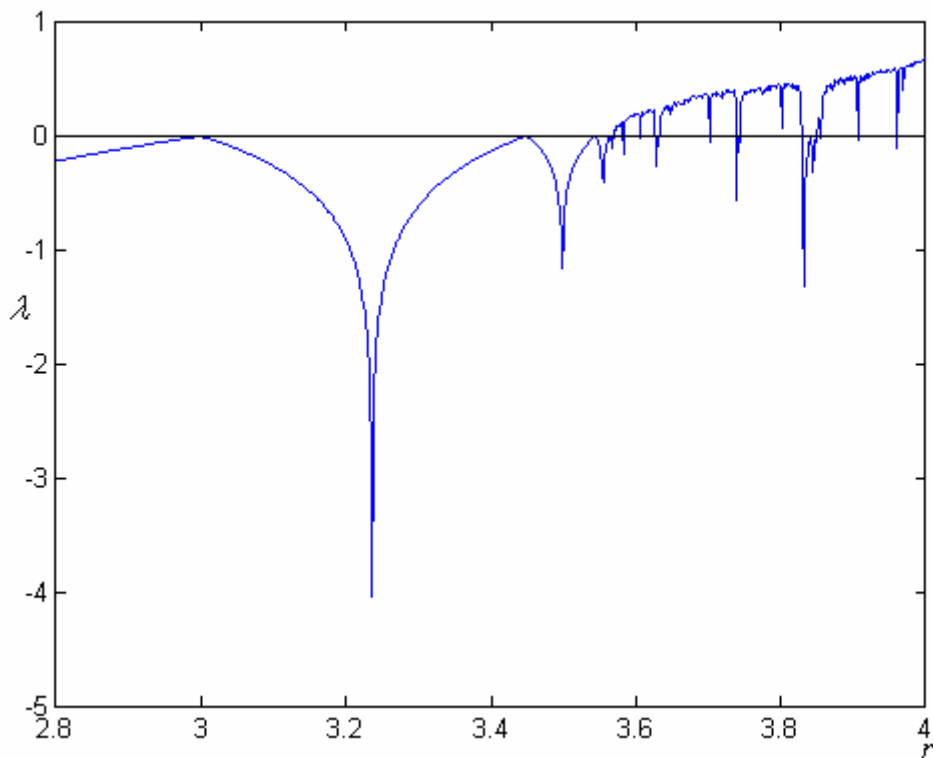
შემდეგ ამ წერტილთა წყვილში მივალთ და ზემოთქმულის ძალით გვექნება:

$\lambda(x_0) = \ln(r) + \frac{1}{2} \{ \ln(1 - 2x_3^*) + \ln(1 - 2x_4^*) \} = \frac{1}{2} \ln|4 + 2r - r^2|$ . ამ ფორმულიდან ჩანს,

რომ  $r$ -ის განხილულ შემთხვევაში ლიაპუნოვის მაჩვენებელი ყველგან უარყოფითია, გარდა  $r = 1 + \sqrt{6}$  ბიფურკაციული მნიშვნელობისა, სადაც იგი ნულის ტოლია.

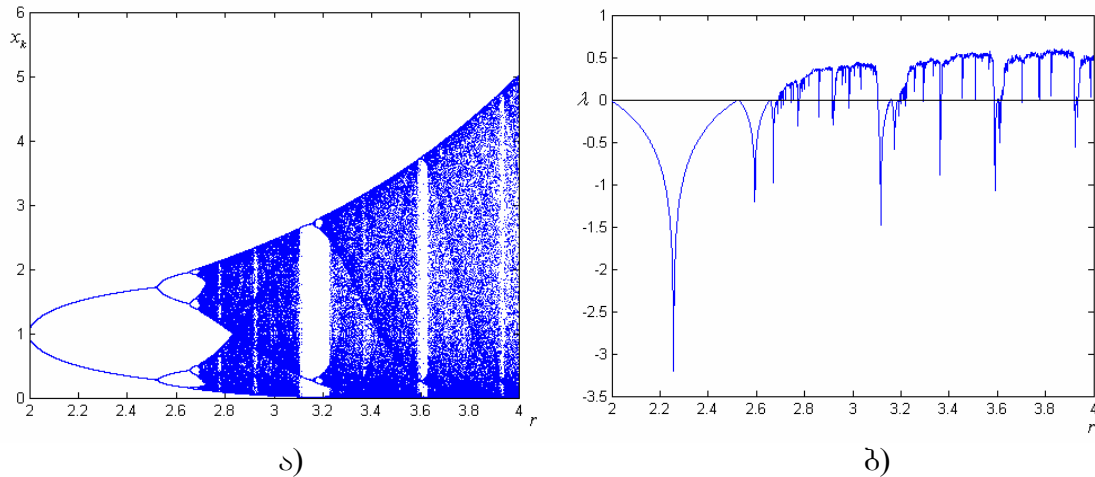
ანალოგიური სურათი გვექნება პერიოდის გაორმაგებისას, გარვამაგებისას და ა.შ. ქაოსური ყოფაქცევის არეში კი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი დადებითი გამოვა.

ლიაპუნოვის მაჩვენებლის დამოკიდებულებას  $r$  პარამეტრზე კვადრატული ასახვისათვის ექნება ნახ.13-ზე მოცემული სახე.



ნახ. 13 ლიაპუნოვის მაჩვენებლის  $\lambda$ -ს  $r$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი კვადრატული ასახვისათვის  $r \in [2.8; 4]$  შუალედში.

როგორც ზემოთ ავლიწმნეთ, ფეიგენბაუმის სცენარით ქაოსში პერიოდის გაორმაგებით გადასვლა არ არის დამახასიათებელი მხოლოდ კვადრატული ასახვისათვის. მაგალითად [16]-ში განხილულია შემდეგი სახის ასახვა:  $x_{n+1} = x_n \exp[r(1-x_n)]$ . ამ ასახვისათვისაც დამახასიათებელია ქაოსში გადასვლა ფეიგენბაუმის სცენარით. ნახ. 14 ა)-ბ).



ნახ. 14 ა)  $x_k$ -ს  $r$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი  $x_{n+1} = x_n \exp[r(1-x_n)]$  ასახვისათვის. გრაფიკი აგებულია  $2.0 < r < 4.0$  არეში. პერიოდის გაორმაგების დაგროვებასა და ქაოსის დაწყებას შეესაბამება  $r = 2.6824$  წერტილი.

ბ)  $\lambda$  ლიაპუნოვის მაჩვენებლის  $r$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი  $x_{n+1} = x_n \exp[r(1-x_n)]$  ასახვისათვის.

როგორც განხილულმა მაგალითებმა გვიჩვენეს, ქაოსის დამახასიათებელი ერთ-ერთი ნიშანი არის ლიაპუნოვის მაჩვენებელი, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენად მდგრადი არიან ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში. დადებითი ლიაპუნოვის მაჩვენებლის არსებობა სტოქასტური მოძრაობის ერთ-ერთი ძირითადი კრიტერიუმია.

ლიაპუნოვის მაჩვენებლები მრავალგანზომილებიანი დინამიური სისტემებისათვის განისაზღვრება შემდეგნაირად [15]:

დავუშვათ მოცემული გვაქვს დინამიური სისტემა, რომელიც აღიწერება განტოლებათა სისტემით:  $\dot{X}(t) = F(X(t))$ , (1.25)

სადაც  $X$   $n$  განზომილებიანი ვექტორია  $x_1, x_2, \dots, x_n$  კომპონენტებით. განვიხილოთ ორი ერთმანეთის მახლობელი ტრაექტორია  $X(t)$  და  $X_1(t)$ , რომლებიც გამოდიან წერტილიდან  $X_0$  და  $X_{10}$ . დავუშვათ  $Y(t) = X_1(t) - X(t)$  ( $Y(0) = X_{10} - X_0$ ), თუ ტრაექტორიები ერთმანეთთან ახლოს არიან, მაშინ  $Y(t)$  ვექტორის ევოლუცია შეგიძლია აღვწეროთ გაწრფივებული განტოლებებით:

$$\dot{Y} = \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X=X(t)} Y, \quad (1.26)$$

სადაც  $\frac{\partial F}{\partial X}$  მატრიცაა ელემენტებით:  $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}$ . ცნობილია, რომ (1.26) განტოლებათა

სისტემას გააჩნია  $n$  ფუნდამენტური კერძო ამოხსნა  $y_i(t)$  ისეთი რომ თითოეული მათგანისათვის ზღვარი:

$$\lambda_i(X_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{y_i(t)}{y_i(0)} \right| \quad (1.27)$$

არსებობს და გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა. ამ  $\lambda_i(X_0)$  სიდიდეებს ეწოდებათ ლიაპუნოვის მაჩვენებლები.

ისმის კითხვა, როგორ უნდა აღმოვაჩინოთ ქაოსური მოძრაობა და რით ხასიათდება ის.

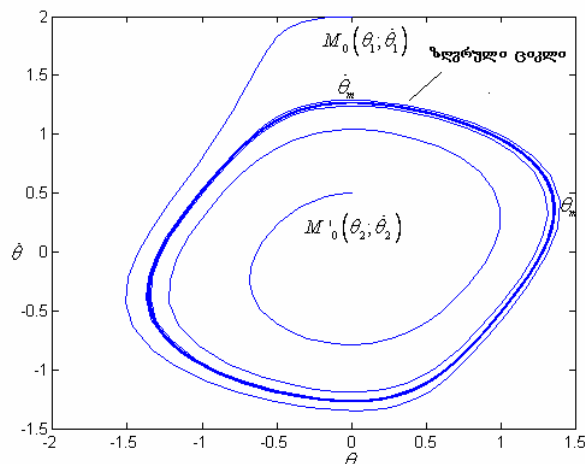
დისიპაციურ სისტემებში ქაოსური მოძრაობის დამახასიათებელი თვისებებია:

1. საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობა;
2. მოძრაობის ფართო ფურიე სპექტრი;
3. ფაზურ სივრცეში მოძრაობის ფრაქტალური თვისება, რომელიც მიუთითებს უცნაური ატრაქტორის არსებობაზე;
4. რეგულარული მოძრაობის მზარდი გართულება სისტემის მახასიათებელი პარამეტრის ცვლილების დროს. (მაგალითად: პერიოდის გაორმაგება ფეიგენბაუმის სცენარით ქაოსში გადასვლის დროს);
5. გარდამავალი ანუ მონაცვლეობითი ქაოსური მოძრაობა. არარეგულარული მოძრაობის პერიოდული აფეთქებები (მონაცვლეობითი ქაოსი), ანდა დასაწყისში მოუწესრიგებელი მოძრაობა, რომელიც ბოლოს და ბოლოს გადადის რეგულარულში;
6. სისტემის მახასიათებელი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი. თუ ლიაპუნოვის მაჩვენებელი დადებითია, ე.ი. ეს იმის ნიშანია, რომ სისტემაში გვაქვს ქაოსი;

დისიპაციური დინამიური სისტემები ხასიათდებიან, ყველა ტრაექტორიების მიზიდვით გეომეტრიული ობიექტისაკენ, რომელსაც ეწოდება ატრაქტორი. ვაჩვენოთ ეს ვან-დერ-პოლის ოსცილატორის მაგალითზე:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\varepsilon - \theta^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0 \quad (1.28)$$

(1.28) განტოლება აღწერს ქანქარას რომელზეც მოქმედებს მაიძულელებელი ძალა და ხახუნის ძალა.

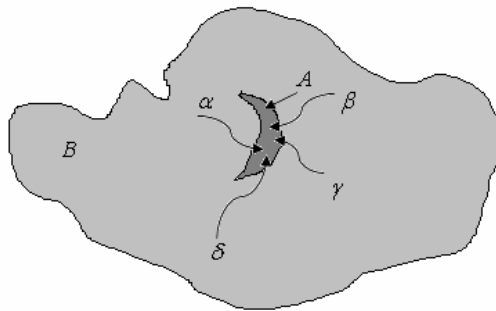


ნახ 1.5 ვან-დერ-პოლის ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი როდესაც  $\varepsilon = 0.4$ . ამ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნი ფაზურ  $(\theta, \dot{\theta})$  სივრცეში წარმოადგენილია

ჩაკეტილი ტრაექტორიის სახით რომელსაც ეწოდება ზღვრული ციკლი. თუ ავირჩევთ ორ საწყის მდგომარეობას 1)  $M_0(\theta_1; \dot{\theta}_1)$  ზღვრული ციკლის გარეთ,

2)  $M'_0(\theta_2; \dot{\theta}_2)$  ზღვრული ციკლის შიგნით, მაშინ ფაზური ტრაექტორიები მიისწრაფიან ზღვრული ციკლისაკენ.

როდესაც ქანქარას ამპლიტუდა აღწევს იმ მნიშვნელობას, რომლის დროსაც ენერგია, რომელიც გადაეცემა ქანქარას ერთი ციკლის განმავლობაში ზუსტად ტოლია ენერგიის დანაკარგის, მყარდება სტაციონალური მდგომარეობა. გვაქვს პერიოდული რეჟიმი, რხევის მუდმივი ამპლიტუდით, ხოლო ტრაექტორიას ფაზურ სივრცეში აქვს ზღვრული ციკლი. ციკლის მიმზიდავ ხასიათში ჩვენ დავრწმუნდებით, თუ სისტემას მცირედ წავანაცვლებთ ზღვრული ციკლიდან, მაგალითად, ქანქარას აღვავზნებთ ბიძგით და მივანიჭებთ  $\theta$  ამპლიტუდას და  $\dot{\theta}$  სიჩქარეს, რომელთა მნიშვნელობაც აღემატება  $\theta_m$ ,  $\dot{\theta}_m$  ზღვრული ციკლის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. რაღაც დროის გასვლის შემდეგ დისიპაცია აიძულებს ქანქარის ტრაექტორიას მიუახლოვდეს ზღვრულ ციკლს, რომელზეც დისიპაცია კომპენსირდება მიწოდებული ენერგიით. ანალოგიურად, ქანქარას დროებითი დამუხრუჭება შეამცირებს მის ამპლიტუდას და სიჩქარეს  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_2$ -მდე, მაგრამ შემდეგ ტრაექტორია კვლავ დაუბრუნდება ზღვრულ ციკლს.



ნახ. 1.6 ატრაქტორის სქემატური გამოსახულება.  $A$  ატრაქტორი და  $B$  მისი მისაზიდი არე. ტრაექტორიები, რომლებიც გამოდიან საწყისი  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  წერტილებიდან მიზიდებიან  $A$  სიმრავლისკენ  $\Phi$  ნაკადით.

ყველაფერი ეს ზღვრული ციკლის შესახებ შეგვიძლია განვაზოგადოთ შემდეგნაირად. ფაზურ სივრცეში  $n$  დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი:

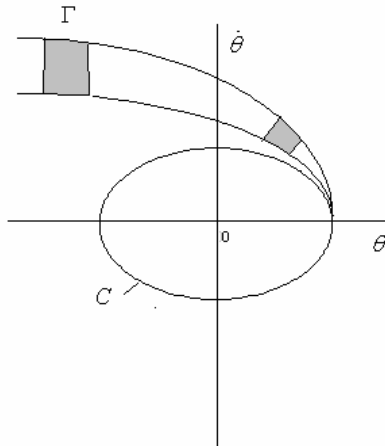
$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X(t)) , X \in R^n \quad (1.29)$$

ქმნის ნაკადს  $\Phi$ , რომელსაც დისიპაციური სისტემისათვის აქვს მიმზიდავი (ატრაქტორი). განსაზღვრების თანახმად ატრაქტორი  $A$  ეს არის კომპაქტური სიმრავლე ფაზურ სივრცეში, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისებები:

1.  $A$  ინვარიანტულია ნაკადის მოქმედების მიმართ:  $\Phi A = A$ ;
2.  $A$ -ს გააჩნია ნულის ტოლი მოცულობა  $n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში.
3.  $A$  იმყოფება  $B$  არეში, რომლის მოცულობა ნულისგან განსხვავებულია და წარმოადგენს ატრაქტორის მისაზიდ არეს. განსაზღვრების თანახმად, მისაზიდი არე ეწოდება ისეთ წერტილთა სიმრავლეს, როდესაც მათგან გამოსული ტრაექტორიები, როცა  $t \rightarrow \infty$  მიისწრაფიან  $A$ -სკენ.

ე. ი.  $A$  ატრაქტორი არის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების ასიმპტოტური ზღვარი, ამ ამონახსნების საწყისი წერტილები ეკუთვნიან  $B$  მისაზიდ არეს. მაშინაც კი, როდესაც  $A$ -ს აქვს მარტივი გეომეტრიული ფორმა,  $B$ -ს აქვს ძალიან რთული სტრუქტურა.

დავუბრუნდეთ ისევ ზღვრულ ციკლს იმისათვის რომ გამოვიკვლიოთ ატრაქტორის ორი მნიშვნელოვანი მახასიათებელი: სისტემის მიერ საწყისი პირობების შესახებ ინფორმაციის დაკარგვა და თუ რა გამომდინარეობს აქედან ატრაქტორის განზომილების შესახებ.



ნახ. 1.7 ფაზური სივრცის მოცულობის შემცირება, რომელიც დაკავშირებულია მიზიდვასთან.  $\Gamma$  არე რომელიც შემოსაზღვრავს რაღაც საწყისი პირობების სიმრავლეს,  $C$  ატრაქტორთან მიახლოებისას გადაგვარდება მონაკვეთამდე.

საწყისი პირობების შესახებ ინფორმაციის დაკარგვა განვიხილოთ ვან-დერ-პოლის ოსცილატორის მაგალითზე, რომელსაც აქვს ზღვრული ციკლი. თავიდან (ზღვრული ციკლიდან მოშორებით) სისტემის მდგომარეობის დასახასიათებლად საჭიროა ორი კოორდინატი  $\theta$  და  $\dot{\theta}$  და ამიტომაც სისტემის აღსაწერად საჭიროა ორგანზომილებიანი ფაზური სივრცე ანუ ზედაპირი. საწყისი პირობების სიმრავლე  $(\theta, \dot{\theta})$  ფაზურ სიბრტყეზე მოცემულია  $\Gamma$  მოცულობით.

დისიპაციის შედეგად ადგილი ექნება ამ მოცულობის შემცირებას. შესაბამისად  $\Gamma$  ზედაპირი ნაკადის მოქმედების შედეგად გადაგვარდება  $C$  მრუდამდე ატრაქტორზე, ე.ი. ხდება ინფორმაციის დაკარგვა იმ წერტილთა ურთიერთგანლაგების შესახებ, რომლებიც უნდა ეკუთვნოდნენ  $\Gamma$  სიმრავლეს.

ამის შემდეგ ფაზური წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საკმარისია მხოლოდ ერთი მრუდწირული კოორდინატი. ეს ილუსტრაციას უკეთებს საერთო პრინციპს: ატრაქტორის განზომილება ნაკლებია ფაზური სივრცის განზომილებაზე ე.ი. ნაკლებია სისტემის თავისუფლების ხარისხზე  $d < n$ .

ეს შედეგი ეყრდნობა ფაზური მოცულობის შემცირებას და ერთდროულად ატრაქტორის არსებობას.

გამოვთვალოთ, თუ რა შედეგებამდე მივყავართ ფაზური მოცულობის შემცირებას. ფაზური მოცულობის ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$

განისაზღვრება ლის წარმოებულთ [11]:  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}$  სადაც  $x_i$  არის  $\vec{x}$

ვექტორის  $i$ -ური კომპონენტი ( $x \in R_n$ ). დისიპაციური სისტემებისათვის ეს

გამოსახულება უარყოფითია ე.ი.:  $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\alpha$ , აქედან  $V = V_0 e^{-\alpha t}$ . როცა  $t \rightarrow \infty$

მაშინ  $V \rightarrow 0$ , ე.ი. როცა ტრაექტორიები აღწევენ ატრაქტორს, საწყისი წერტილების ნებისმიერი სიმრავლე  $V$  მოცულობით აისახება ნულოვანი მოცულობის სიმრავლეზე. თვითონ ატრაქტორის მოცულობა ნულის ტოლია.

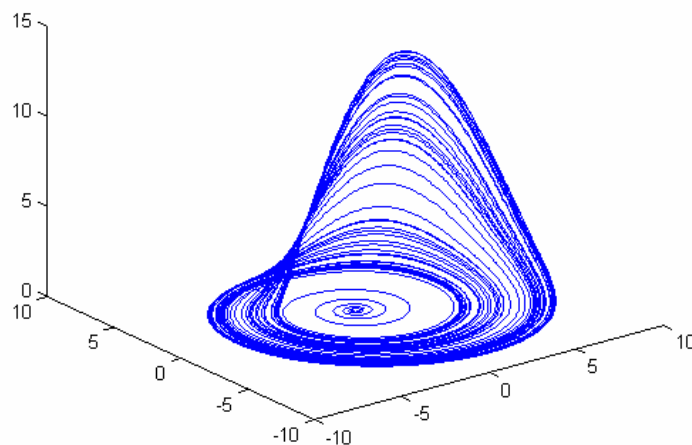


სამგანზომილებიან სივრცეში მოცულობის ქვეშ იგულისხმება  $R^3$  სივრცის ნაწილი. იმისათვის რომ დავაკმაყოფილოთ პირობა  $d < n$ , ნებისმიერ ატრაქტორს უნდა ჰქონდეს სამზე ნაკლები განზომილება.

როგორც ვთქვით ატრაქტორზე ხდება საწყისი პირობების შესახებ ინფორმაციის დაკარგვა. სინამდვილეში ეს ასახავს მხოლოდ არამგრძობიარობას საწყისი პირობების მიმართ და ინფორმაციის გაერთიანებას, რადგანაც მრავალი საწყისი პირობა ატრაქტორის გარეთ ევოლუციას განიცდის და ჯდება ატრაქტორზე.

მეორეს მხრივ, ქაოსური რეჟიმისათვის დამახასიათებელია ტრაექტორიების ერთმანეთთან დაცილება დროის სასრულო მონაკვეთის შემდეგ. ეს კი იმას ნიშნავს რომ ერთმანეთისაგან უმნიშვნელოდ განსხვავებული საწყისი მდგომარეობების სიმრავლე ატრაქტორზე წარმოქმნის ძალიან ბევრ საბოლოო მდგომარეობებს. ამ პირობას ეწოდება მგრძობიარობა საწყისი პირობების მიმართ. რაც იმას ნიშნავს, რომ ქაოსურ რეჟიმში როდესაც ლიპუნოვის ექსპონენტი დადებითია გვაქვს საწყისი პირობებში უზუსტობის გაძლიერება დროში ექსპონენციალურად, რასაც მივყავართ ატრაქტორზე ტრაექტორიების ერთმანეთთან ექსპონენციალურად დაცილებაში.

წარმოიქმნა ერთი შეხედვით პარადოქსი, ერთი მხრივ ტრაექტორიები მიიზიდებიან ატრაქტორისკენ, მეორეს მხრივ ისინი ექსპონენციალურად სცილდებიან ერთმანეთს. სინამდვილეში ტრაექტორიების ერთმანეთთან დაცილება ატრაქტორის განზომილებას ქვემოდან შემოსაზღვრავს. ტოპოლოგიური მიზეზებით საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობა ორგანზომილებიანი ატრაქტორებისათვის შეუძლებელია [11, 24-25]. ფაზური ტრაექტორიების ევოლუცია უნდა ხდებოდეს სივრცეში, რომლის განზომილება არ არის ნაკლები სამზე. ნახ. 1.8 წარმოდგენილია ერთ-ერთი ასეთი შემთხვევა, რესლერის ატრაქტორი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, მეზობელი ტრაექტორიები ერთმანეთს სცილდებიან როგორც სპირალზე, გამოდიან ჰორიზონტალური სიბრტყიდან და შემდეგ ისევ ბრუნდებიან სპირალზე. ასეთი პროცესი მეორდება უსასრულოდ.



ნახ.1.8 ფაზური ტრაექტორიების დაცილების, სქემატური გამოსახვა ფაზურ სივრცეში რესლერის ატრაქტორის მაგალითზე. მეზობელი ტრაექტორიები ერთმანეთს სცილდებიან, როგორც სპირალზე გამოდიან ჰორიზონტალური სიბრტყიდან და შემდეგ ისევ ბრუნდებიან სპირალზე. ასეთი პროცესი მეორდება უსასრულოდ.

ამრიგად, საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობას მივყავართ იქამდე, რომ ატრაქტორის განზომილება  $d > 2$ . მეორეს მხრივ დისიპაციურ სისტემებში (ე.ი. სისტემებში სადაც არსებობს ატრაქტორი) ფაზური სივრცის მოცულობები



დროის მიხედვით მცირდება . შესაბამისად ატრაქტორის მოცულობა უნდა იყოს ნულის ტოლი, რასაც სამგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში მიყვავართ უტოლობამდე  $d < 3$ . ატრაქტორი, რომელიც წარმოადგენს ქაოსურ რეჟიმს უნდა იყოს ისეთი, რომ სრულდებოდეს უტოლობა  $2 < d < 3$ . ერთი შეხედვით ასეთი პირობა უნდა გამორიცხავდეს ატრაქტორის არსებობას, რადგანაც ევკლიდის განზომილება უნდა იყოს მთელი რიცხვი. მაგრამ ატრაქტორები, რომელთა განზომილება აკმაყოფილებს უტოლობას  $2 < d < 3$ , მაინც არსებობენ. სხვა არაორდინარულ თვისებებთან ერთად მათ გააჩნიათ წილადური განზომილება, რომელსაც ეწოდება ფრაქტალური განზომილება.

ამრიგად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ დისიპაციურ დინამიურ სისტემას შეუძლია გახდეს ქაოსური, თუ ფაზურ სივრცის განზომილება მეტია ან ტოლია სამის. ასეთი ქაოსი (მცირე თავისუფლების ხარისხით) განპირობებულია ატრაქტორზე საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობით. უცნაური ატრაქტორის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი თვისებები იმაში მდგომარეობს რომ:

1. ფაზური ტრაექტორიები, ყოველ შემთხვევაში ისინი, რომლებიც განლაგებულნი არიან ატრაქტორთან საკმაოდ ახლოს, მიისწრაფიან ატრაქტორისკენ.
2. ახლო ტრაექტორიები ატრაქტორზე სცილდებიან ერთმანეთს. (საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობა)
3. ატრაქტორს გააჩნია ფრაქტალური განზომილება.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ დისიპაციურ დინამიურ სისტემებს გააჩნიათ ის თვისება, რომ როდესაც  $t \rightarrow \infty$  მათი ამოხსნები მიისწრაფიან ფაზური სივრცის, რაღაც ქვესიმრავლისაკენ. ეს ქვესიმრავლე რეგულარული დინამიკის შემთხვევაში შეიძლება იყოს ან მდგრადი სტაციონალური წერტილი, ან ზღვრული ციკლი ანდა ინვარიანტული ტორი. ყველა ესენი წარმოადგენენ ფაზური სივრცის ქვესიმრავლეებს. თუ დისიპაციურ სისტემაში მოძრაობა ქაოსურია, მაშინ სიმრავლე, საითკენაც მიიზიდებიან დისიპაციური სისტემის ამონახსნები, არის უცნაური ატრაქტორი, რომელსაც უკვე არ გააჩნია გლუვი სტრუქტურა. უცნაური ატრაქტორის გეომეტრიული აგებულება გაცილებით უფრო რთულია. მათ გააჩნიათ გეომეტრიული (მასშტაბური) ინვარიანტობა ანდა როგორც ამბობენ, სკეილინგური სტრუქტურა. როგორც უკვე ავღნიშნეთ, უცნაური ატრაქტორი შეიძლება წარმოიშვას დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში, რომლის ფაზური სივრცის განზომილება  $n \geq 3$ . თუმცა რთული გეომეტრიული მიმზიდავი სიმრავლე შეიძლება წარმოიშვას დინამიურ სისტემაში დისკრეტული დროით. ამის საილუსტრაციო განვიხილოთ ენოს ასახვა. ენოს ასახვა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ლოგისტური ასახვის ორგანზომილებიანი განზოგადება [17, 21]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (1.30)$$

იმისათვის რომ მივიღოთ ეს ასახვა გადავწეროთ (1.11) ასახვა შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} y_{n+1} = e^{-\Gamma T} [y_n + Kf(x_n)] \\ x_{n+1} = x_n + \frac{e^{\Gamma T} - 1}{\Gamma} y_{n+1} \end{cases} \quad (1.31)$$

ამოვხსნათ (1.31)-ის მეორე განტოლება  $y_{n+1}$ -ის მიმართ:

$$y_{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)\Gamma}{e^{\Gamma T} - 1} \quad (1.32)$$

ჩავსვათ  $y_{n+1}$  და  $y_n$  (131)-ის პირველ განტოლებაში, მაშინ როცა  $T=1$  მივიღებთ:

$$x_{n+1} + e^{-\Gamma} x_{n-1} = (1 + e^{-\Gamma}) x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} Kf(x_n) \quad (1.33)$$

თუ  $f(x_n)$  ფუნქციას და პარამეტრებს შევარჩევთ შემდეგნაირად:

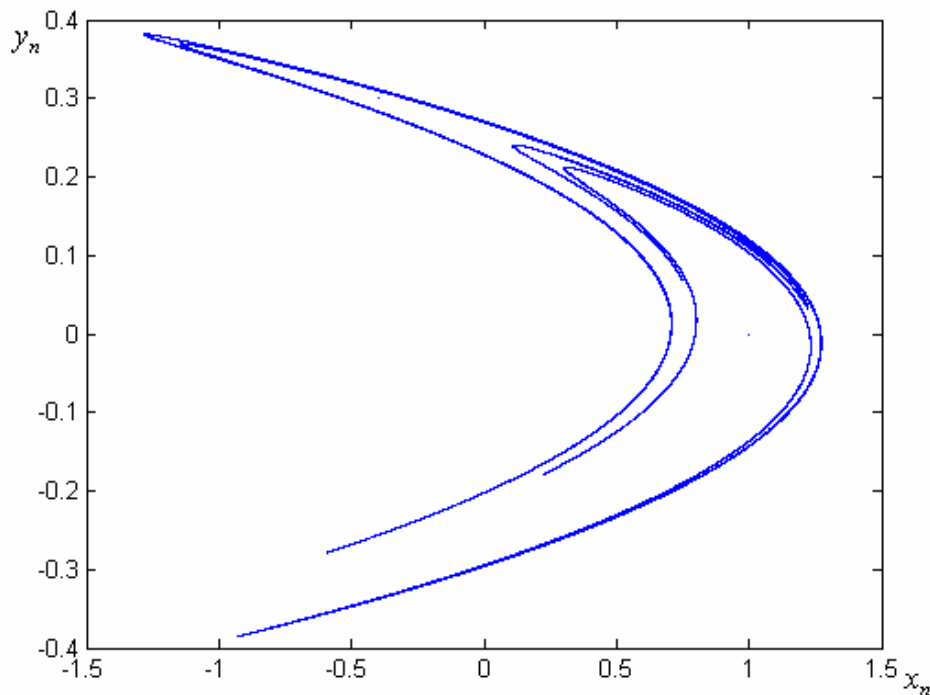
$$\frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} Kf(x_n) = -(1 - e^{-\Gamma}) x_n + 1 - ax_n^2 \quad (1.34)$$

მაშინ (1.34)-დან მივიღებთ:

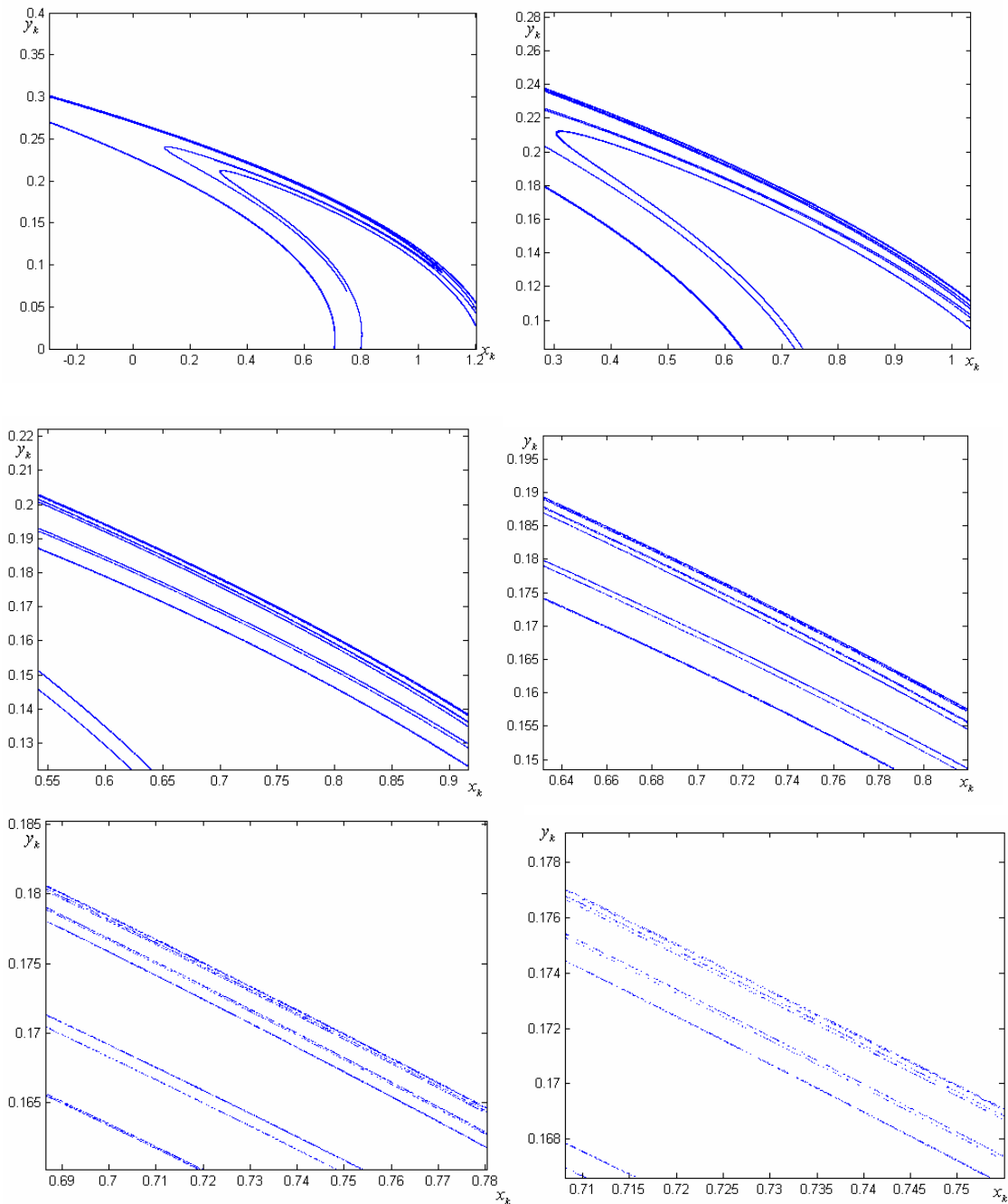
$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1} \quad (1.35)$$

რაც ექვივალენტურია (1.30) ასახვის.

თუ (1.30) წერტილთა სიმრავლეს გამოვსახავთ  $(x_n, y_n)$  ფაზურ სივრცეში მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ ენოს ატრაქტორს. ენოს ატრაქტორი შედგება მრუდებისაგან, რომლებსაც გააჩნიათ სასრული სივანე, ე.ი. შინაგანი სტრუქტურა. იმისათვის რომ ამაში დავრწმუნდეთ ავიღოთ ენოს ატრაქტორის რაიმე არე და ის გავადიდოთ. მაშინ დავინახავთ რომ ეს მრუდები რომლებიც ქმნიან ენოს ატრაქტორს, შედგება უფრო წვრილი მრუდებისაგან. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს დავინახავთ რომ ეს წვრილი მრუდები შედგებიან სხვა უფრო წვრილი მრუდებისაგან და ასე შემდეგ. ე.ი. ენოს ატრაქტორის სტრუქტურა მასშტაბის გაზრდისას არ იცვლება. ასეთ სიმრავლეს ეწოდებათ გეომეტრიულად (მასშტაბურად) ინვარიანტული სიმრავლეები.



ნახ. 19 ენოს ატრაქტორი, რომელიც მიიღება (1.31) ასახვიდან როცა  $a=1.4$ ,  $b=0.3$ .



ნახ.1.10 ენოს ატრაქტორის მცირე არის გადიდებით მიღებული სურათების თანმიმდევრობა. ნახაზიდან ჩანს ატრაქტორის გეომეტრიული ინვარიანტობა.

მასშტაბურად ინვარიანტული სიმრავლეების განზომილების დასახასიათებლად შემოაქვთ ჰაუსდორფის განზომილება [3, 11-12].

განვიხილოთ წერტილთა სიმრავლე  $n$  განზომილებიან სივრცეში. დავფაროთ ეს წერტილთა სიმრავლე  $\varepsilon$  წიბოს სიგრძის  $n$  განზომილებიანი კუბებით.  $N(\varepsilon)$  იყოს კუბების უმცირესი რიცხვი რომელიც საჭიროა ამ სიმრავლის დასაფარავად. ჰაუსდორფის განზომილება  $D$  განისაზღვრება, როგორც ზღვარი  $\ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon)$ , როდესაც კუბების წიბოს სიგრძე  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.36)$$

იგივე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ სხვანაირად. კუბების მინიმალური რიცხვი, რომელიც საჭიროა წერტილთა მოცემული სიმრავლის დასაფარავად დამოკიდებულია  $\varepsilon$ -ზე როგორც  $\varepsilon^{-D}$ .

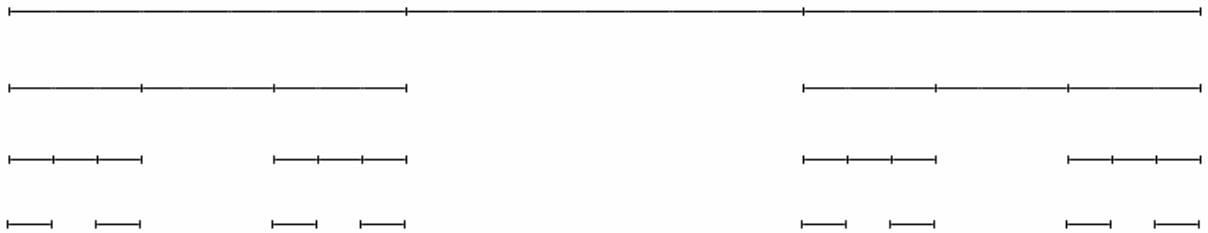
წერტილისათვის, მონაკვეთისათვის და ზედაპირის არისათვის ჰაუსდორფის განზომილება ემთხვევა ევკლიდის განზომილებას. მართლაც წერტილისათვის  $N(\varepsilon)=1$ , შესაბამისად ჰაუსდორფის განზომილება  $D=0$ .  $L$  მონაკვეთისათვის

$$N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1} \text{ ამ შემთხვევაში } D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln L\varepsilon^{-1}}{\ln \varepsilon^{-1}} = 1.$$

თუ გვაქვს ზედაპირის არე  $S$  ფართობით  $N(\varepsilon) = S\varepsilon^{-2}$  აქედან  $D=2$ .

განვიხილოთ ახლა კანტორის სიმრავლე. ეს სიმრავლე მიიღება შემდეგნაირად. ავიღოთ ერთეული სიგრძის მონაკვეთი  $[0,1]$  დავყოთ ის სამ ტოლ ნაწილად და ამოვჭრათ შუა ნაწილი  $[1/3, 2/3]$ . მიღებულ მონაკვეთებს მოვექცეთ ანალოგიურად. მაშინ მივიღებთ მონაკვეთებს. პირველ ეტაპზე გვექნება ერთი მონაკვეთი, მეორე ეტაპზე ორი, მესამეზე ოთხი.  $k$  ეტაპზე გვექნება  $2^k$  მონაკვეთი, რომლებიც არ არიან დაკავშირებულნი ერთმანეთთან ამასთან თითოეულის სიგრძე ტოლია  $3^{-k}$ . როდესაც  $k \rightarrow \infty$ , მივიღებთ რაღაც წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც ეწოდება კანტორის სიმრავლე. ამასთან ყველა ამოჭრილი მონაკვეთების სიგრძეთა ჯამი ტოლია ერთის:

$$l = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2/3}{1-2/3} = 1.$$



ნახ. 1.11 კანტორის სიმრავლის აგება.

ე.ი. კანტორის სიმრავლე ყოველ ეტაპზე შედგება  $N = 2^m$  ინტერვალისაგან, ამასთან თითოეული ინტერვალის სიგრძეა  $\frac{1}{3^m}$ . როდესაც  $k=0$ ,  $N=1$ ,  $\varepsilon=1$ .

როცა  $k=1$ ,  $N=2$ ,  $\varepsilon=1/3$ , როცა  $k=2$ ,  $N=4$ ,  $\varepsilon=1/9$ , როცა  $k=m$   $N=2^m$ ,  $\varepsilon=1/3^m$  ამიტომაც ჰაუსდორფის გაანზომილება:

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631.$$

ე.ი. კანტორის სიმრავლის განზომილება არ ემთხვევა მის ტოპოლოგიურ განზომილებას. კანტორის სიმრავლე ეს არ არის წერტილი, რომლის განზომილება არის ნულის ტოლი, მაგრამ არც მონაკვეთია რომლის განზომილება ერთის ტოლია. ასეთ სიმრავლეებს, რომელთა ჰაუსდორფის განზომილება არ ემთხვევა ტოპოლოგიურ განზომილებას ფრაქტალები ეწოდებათ.

უცნაური ატრაქტორები სტრუქტურულად ახლოს არიან კანტორის სიმრავლესთან. ამიტომაც უნდა მოველოდეთ რომ უცნაური ატრაქტორის განზომილება გამოვიდეს წილადური. ამასთან ატრაქტორის განზომილება შეიძლება გამოყენებულ იქნას იმისათვის რომ განვასხვავოთ უცნაური ატრაქტორი ჩვეულებრივისაგან.

ზემოთ განხილული ენოს ატრაქტორის განზომილებაა  $D=1.26$ , როდესაც  $a=1.4$  და  $b=0.3$ .

ჰაუსდორფის  $D$  განზომილების რიცხვითი გამოთვლა ფაზური სივრცის  $\varepsilon$  ზომების კუბების დაფარვით და წერტილების დათვლით რომლებიც მოხვედებიან მოცემულ კუბში პრაქტიკული განხორციელებისათვის ძალიან რთული ამოცანაა. ამიტომაც პრაქტიკული გამოთვლებისათვის იყენებენ ატრაქტორის კორელაციურ განზომილებას [3, 15, 17, 18]. ამ დროს უწყვეტი ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში იცვლება  $\{x_i\}$   $N$  წერტილთა სიმრავლით. შემდეგ ითვლება მანძილი წერტილთა სხვადასხვა წყვილებს შორის:  $s_{ij} = |x_i - x_j|$ .

კორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება როგორც:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \text{ (წყვილთა რიცხვი } (i, j) \text{ რომელთა შორის დაშორება } s_{ij} < r \text{)}$$

ბევრი ატრაქტორისათვის ეს ფუნქცია დამოკიდებულია  $r$ -ზე როცა  $r \rightarrow 0$  ხარისხობრივად ე.ი  $\lim_{r \rightarrow 0} C(r) = ar^d$ , ამიტომაც ფრაქტალურ ანდა კორელაციურ განზომილებას განსაზღვრავენ  $(\ln C, \ln r)$  გრაფიკზე დახრის კოეფიციენტით:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (1.37)$$

$C(r)$ -ის დასათვლელად გამოიყენება შემდეგი კორელაციური ინტეგრალი:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H(r - |x_i - x_j|) \quad (1.38)$$

სადაც  $H(s)$  ხევისაიდის ფუნქციაა:  $H(s)=1$  როცა  $s > 0$  და  $H(s)=0$  როცა  $s < 0$ .

ბოლოს მოვიყვანოთ ლორენცის სისტემა, როგორც ერთ-ერთი კლასიკური მაგალითი დისიპაციური სისტემისა, რომელშიც შესაძლებელია ქაოსური მოძრაობა.

სწავლობდა რა ამინდის პროგნოზირების სირთულის ამოცანას ედვარდ ლორენცმა 1963 წელს ატმოსფეროს კონვექციის შესასწავლად გამოიყვანა სამი ურთიერთდაკავშირებული არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებისაგან [5]: შედგენილი მოდელი:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x); \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y; \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz; \end{cases} \quad (1.39)$$

სადაც  $x$  კონვექციური მოძრაობის ამპლიტუდაა,  $y$  აღმაავალი და დაღმაავალი ნაკადების ტემპერატურათა სხვაობა, ხოლო  $z$  ვერტიკალური ტემპერატურული პროფილის გადახრა.  $\sigma$  პრანდტლის უგანზომილებო რიცხვია, რომელიც წარმოადგენს სიბლანტისა და თბოგამტარობის შეფარდებას,  $b$  სისტემის გეომეტრიის მახასიათებელი სიდიდეა,  $r$  მმართავი პარამეტრი რომელიც სხვადასხვა მნიშვნელობებს შეიძლება იღებდეს.

ლორენცის ეს მოდელი მიიღება ნავე სტოქსის განტოლებიდან [5, 14].  $\sigma$  და  $b$  პარამეტრების მნიშვნელობები ფიქსირებულია და როგორც წესი იღებენ ხოლმე  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ .

ლორენცის სისტემას გააჩნია შემდეგი ზოგადი თვისებები:

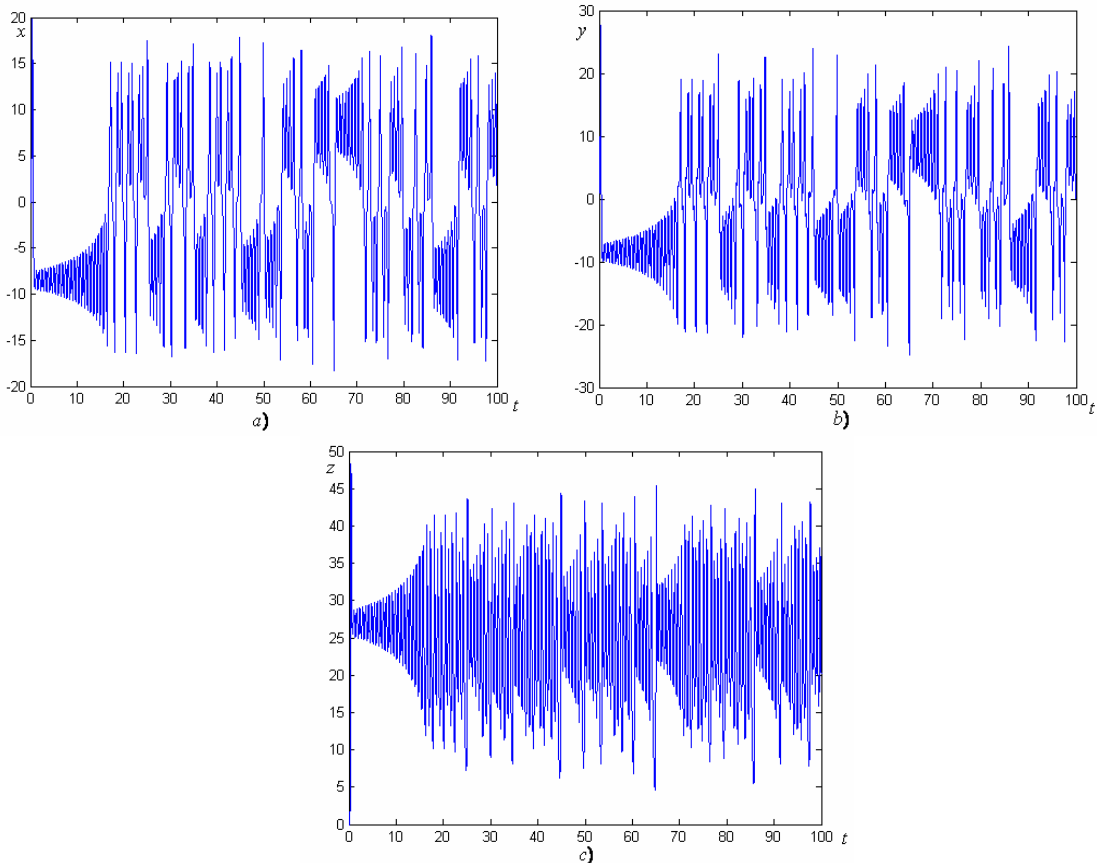
1. ცვლადთა გარდაქმნა  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow z$  არ ცვლის (1.39) განტოლების სახეს ამიტომაც ფაზური სურათი სიმეტრიულია  $z$  ღერძის მიმართ.
2. (1.39) სისტემის ყველა ფაზური ტრაექტორია ბოლოს და ბოლოს ხვდება:  

$$V = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 = K^2 (\sigma + r)^2$$
 სფეროს შიგნით [14-15].
3. ფაზური მოცულობა დროის განმავლობაში მუდმივად იკუმშება ე.ი. ლორენცის სისტემა არის დისიპაციური სისტემა:

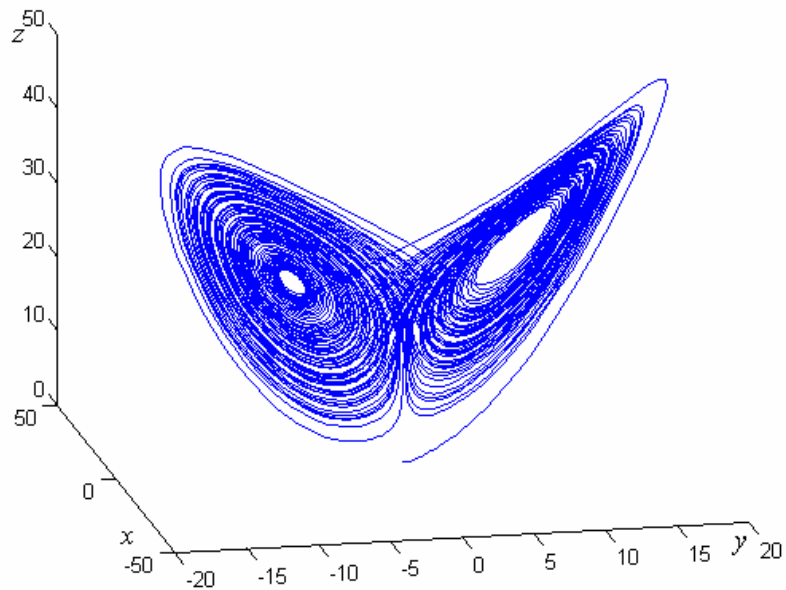
$$\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial}{\partial z} \dot{z} = -\sigma - 1 - b < 0 \quad .$$

ამ შედეგის აზრი შემდეგში მდგომარეობს. განვიხილოთ ერთნაირი სისტემების ანსამბლი, რომელთაგან თითოეული აღიწერება ლორენცის განტოლებებით და ისინი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მხოლოდ საწყისი პირობებით. დავუშვათ ეს საწყისი პირობები დროის საწყის მომენტში იკავებენ, რაღაც მოცულობას  $\Delta V$ . მაშინ ანსამბლის დროში ევოლუციისას ეს მოცულობა მცირდება კანონით  $\Delta V = \Delta V_0 \exp(Dt)$  სადაც  $D = -\sigma - b - 1$ . დროთა განმავლობაში ის უნდა კონცენტრირდეს ნულოვანი მოცულობის სიმრავლეზე.

ლორენცის სისტემა  $r$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის შესწავლილ იქნა მრავალი ავტორის მიერ [14, 15, 21]. თუ  $r$ -ს ავიღებთ  $r = 28$  და ამოვხსნით (1.39) განტოლებათა სისტემას რიცხვითად, მაშინ დაინახავთ რომ სისტემაში დამყარებულია ქაოსური ავტორხვევითი რეჟიმი (ნახ. 1.12), ხოლო ლორენცის სისტემის ფაზურ პორტრეტს აქვს ნახ.1.13-ზე გამოსახული სახე, რომელსაც უწოდებენ ლორენცის ატრაქტორს.



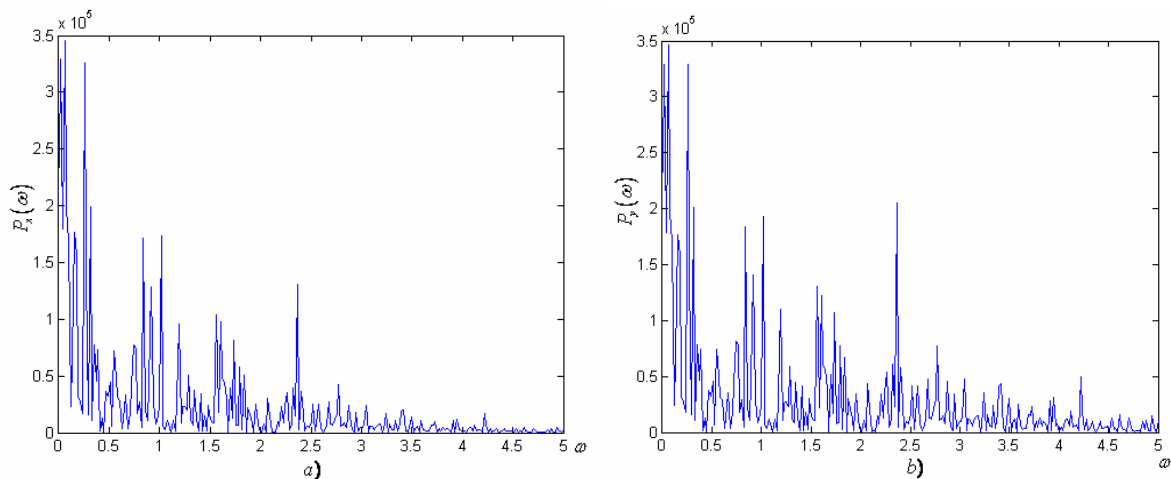
ნახ.1.12 ლორენცის სისტემის  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ცვლადების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკი აგებულია პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ .



ნახ.1.13 ლორენცის ატრაქტორის ფაზური პორტრეტი.

როგორც ნახ.1.13 ფაზური სურათიდან ჩანს ლორენცის ატრაქტორი შედგება ორი ფრთისაგან და ის თითქმის ძვეს  $xoy$  სიბრტყეში. ამას ადასტურებს ლორენცის ატრაქტორის ჰაუსდორფის განზომილება, რომელიც ტოლია  $D = 2.06$ . ეს შედეგი ადასტურებს, რომ ლორენცის ატრაქტორი არ არის ზედაპირი. მაგრამ ამავე დროს მას არ გააჩნია მოცულობაც.

ქაოსის სრულად დადასტურებისათვის ლორენცის სისტემაში მოვიყვანოთ ავტოკორელაციის ფუნქციის  $G_x(\tau) = \langle x(t+\tau)x(\tau) \rangle$  ფურიე სახის  $G_x(\omega) = \int d\tau G_x(\tau) e^{i\omega\tau}$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკები (ნახ.1.14).



ნახ.1.14 ლორენცის სისტემის  $x$  და  $y$  ცვლადების კორელაციის ფუნქციის ფურიე სახის  $\omega$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი. . ის ფაქტი რომ კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახეს  $G(\omega)$ -ს აქვს სასრული სიგანე დამადასტურებელია სისტემაში ქაოსის არსებობის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რხევითი პროცესი არ ხასიათდება მხოლოდ ერთი სიხშირით (პერიოდით). რხევით პროცესში ჩართულია ყველა სიხშირეები (პერიოდები), რომლებიც განლაგებულნი არიან სასრულ სიხშირულ ინტერვალში.

### 1.3 ქაოსი კონსერვატულ სისტემებში

კონსერვატული სისტემების დინამიკას საფუძვლად უდევს კარგად ცნობილი ჰამილტონის განტოლებები, რომელიც წარმოადგენს ჩვეულებრივ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას [4,19-20]:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (1.40)$$

სადაც  $(q_i, p_i)$  წარმოადგენს განზოგადებულ კოორდინატებს და იმპულსებს.

განტოლებათა სისტემის ინტეგრირება ხდება  $t=t_0$  დროის საწყის მომენტში  $q_i(t_0) = q_i^0, p_i(t_0) = p_i^0$  საწყისი პირობების შერჩევით. ჰამილტონურ სისტემებში შეიძლება განხორციელდეს მრავალი სხვადასხვა ტიპის მოძრაობები, სრულიად ინტეგრირებადი დინამიკიდან დაწყებული კვაზიპერიოდული მოძრაობით და ქაოსით დამთავრებული.

(1.40) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ  $q_i$  და  $p_i$  როგორც დროის და საწყისი პირობების ფუნქციები:  $q_i = q_i(t, q_i^0, p_i^0)$ ,  $p_i = p_i(t, q_i^0, p_i^0)$ . ეს პროცესი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც წერტილის მოძრაობა  $2n$  განზომილებიან სივრცეში, რომლის ღერძებზე გადაზომილია  $q_i$  კოორდინატები და  $p_i$  იმპულსები. ასეთ სივრცეს ფაზური სივრცე ეწოდება.

ფაზურ სივრცეს გააჩნია შემდეგი თვისებები [4,19-22]: 1. დროის ნებისმიერ მომენტში ტრაექტორიები, განსაზღვრული (1.40) განტოლებათა სისტემით ერთმანეთს არ კვეთენ. ეს თვისება გამომდინარეობს (1.40) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის არსებობის და ერთადერთობის პირობიდან; 2. ფაზური სივრცის მოცულობის შენახვა (ლიუვილის თეორემა), რაც იმაში მდგომარეობს, რომ თუ დროის საწყის  $t_0$  მომენტში ფაზური წერტილები ავსებენ ფაზური სივრცის  $D_0$  არეს და  $t$  დროის შემდეგ ეს ფაზური არე გარდაიქმნა ამ სივრცის სხვა  $D_t$  არეში, მაშინ შესაბამისი ფაზური მოცულობები ერთმანეთის ტოლია:  $\int_{D_0} dq_0 dp_0 = \int_D dq dp$ ; 3.  $D_0$  არე უწყვეტად გადადის  $D_t$  არეში რაც იმას

ნიშნავს რომ საზღვარი  $S_0$  რომელიც შემოსაზღვრავს  $t_0$  მომენტში ფაზური სივრცის  $D_0$  არეს  $t$  დროის შემდეგ ტრანსფორმირდება  $S_t$  საზღვარში, რომელიც შემოსაზღვრავს  $D_t$  არეს.

ასეთ სისტემებს კონსერვატული სისტემები ეწოდებათ.

ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ინტეგრირების საკითხი საკმაოდ რთულია, არსებობს ზოგადი მეთოდები [19, 20, 23] რომელიც საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ზუსტი ანდა მიახლოებითი ამონახსნები. ჰამილტონის განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს სრულად ინტეგრირებად სისტემას თუ არსებობს ისეთი კანონიკური გარდაქმნა  $(q_i, p_i) \rightarrow (\theta_i, I_i)$  სადაც  $i=1,\dots,n$ , რომლის დროსაც ჰამილტონის ფუნქცია არ არის დამოკიდებული  $\theta_i$  კოორდინატზე. ამ შემთხვევაში  $I_i$  ცვლადებს ეწოდებათ ქმედების ცვლადები, ხოლო  $\theta_i$  ეწოდება კუთხის ცვლადები. მაშინ (1.40) განტოლებათა სისტემა ახალ ცვლადებში ჩაიწერება ასე:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}; \quad \dot{I}_i = 0, \quad i=1,\dots,n; \quad (1.41)$$

რომელიც ადვილად ინტეგრირდება და გვაძლევს:



$$I_i = I_{oi} = \text{const}; \quad \theta_i = \omega_i t + \theta_0, \quad \text{სადაც } \omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad i=1\dots n \quad (1.42)$$

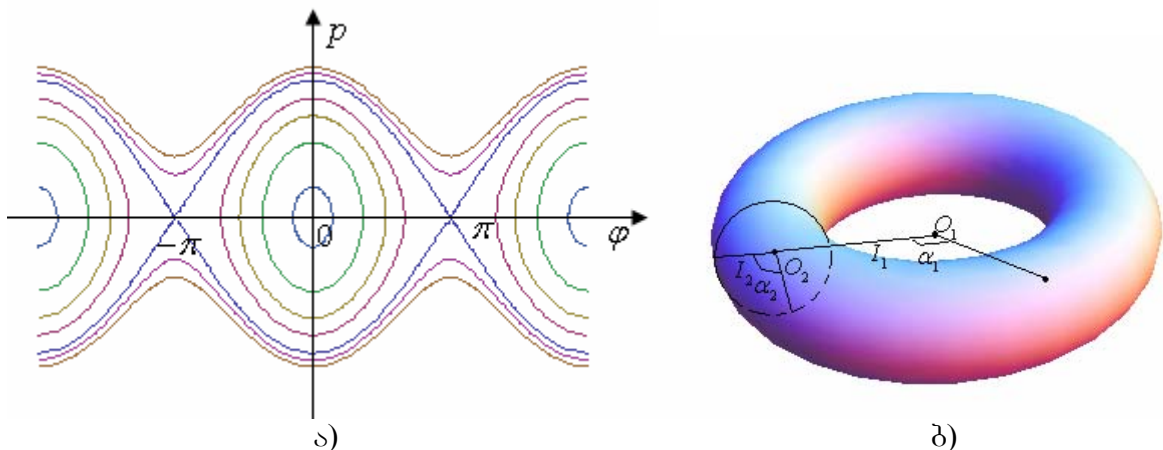
სისტემები ერთი თავისუფლების ხარისხით ყოველთვის ინტეგრირებადია, რადგანაც მათი ჰამილტონიანი წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს:  $H(p, q) = E$ . მის მაგალითს წარმოადგენს მათემატიკური ქანქარას მაგალითი,

$$\text{რომლის ჰამილტონიანი ჩაიწერება შემდეგნაირად: } H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi \quad (1.43)$$

სადაც  $\varphi$  ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა,  $g$  თავისუფალი ვარდნის აჩქარება. ქანქარას მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\dot{p} = -mgl \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2} \quad (1.44)$$

აქედან  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$ , სადაც  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  მცირე რხევების სიხშირეა. ქანქარას გააჩნია მოძრაობის ორი რეჟიმი 1. ბრუნვითი, როდესაც ენერგია  $E = E_{rot} > mgl$  მეტია მაქსიმალურ პოტენციურ ენერგიაზე. 2. რხევითი, როდესაც ენერგია  $E = E_{osc} < mgl$ . თუ  $E \approx E_s = mgl$ , მაშინ მოძრაობა ხდება სეპარატრისაზე, რომელიც ერთმანეთისაგან გამოყოფს რხევით და ბრუნვით რეჟიმებს (ნახ.1.15 ა)).



ნახ.1.15 ა) არაწრფივი საქანის ფაზური პორტრეტი.  $(p, \varphi) = (0, 2\pi k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  წერტილების მახლობლად ფაზური მრუდები წარმოადგენენ ელიფსებს ამიტომ მათ ელიფსური წერტილები, ხოლო  $(p, \varphi) = (0, \pi + 2\pi k)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  წერტილებს ჰიპერბოლური წერტილები ეწოდებათ, რადგან მათ მახლობლად ფაზური მრუდები ჰგვანან ჰიპერბოლებს.

ბ) ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემის ფაზური სივრცე ქმედება-კუთხის ცვლადებში.

სისტემებისათვის ორი თავისუფლების ხარისხით ფაზური სივრცე ოთხგანზომილებანია, თუ გადავალთ ქმედება კუთხის ცვლადებზე:  $(q_1, p_1, q_2, p_2) \rightarrow (\theta_1, I_1, \theta_2, I_2)$  მაშინ ასეთი სისტემების დინამიკა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც მოძრაობა ორგანზომილებიან ტორზე (ნახ.1.15 ბ), სადაც  $O_1$  და  $O_2$  წრეწირებზე ბრუნვის კუთხური სიჩქარეებია  $\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2)$  და  $\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2)$  დამოკიდებულია  $I_1$ -ზე და  $I_2$ -ზე. ამიტომ ისინი იცვლებიან ტორიდან ტორზე. იცვლება აგრეთვე მათი ფარდობა:

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1(I_1, I_2)}{\omega_2(I_1, I_2)}$ . თუ ეს თანაფარდობა რაციონალურია:  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{m}$ , მაშინ სისტემის

დინამიკა არის პერიოდული, ფაზური ტრაექტორია იკეტება როდესაც ფაზური წერტილი შეასრულებს  $k$  ბრუნს  $O_1$  წრეწირის მიმართ და  $m$  ბრუნს  $O_2$

წრეწირის მიმართ. თუ ეს თანაფარდობა ირაციონალურია  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{k}{m}$ , მაშინ

ფაზური ტრაექტორია ყველგან თანაბრად ეხვევა ტორს და ასეთ მოძრაობას ეწოდება კვაზიპერიოდული ანდა პირობითად პერიოდული [24-25].

რადგანაც  $I_1$  და  $I_2$  ნებისმიერი შეიძლება იყოს, ფაზური სივრცე ორი თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში წარმოდგინდება როგორც ორგანზომილებიან ტორთა სისტემა, რომლებიც ერთმანეთში არიან ჩადგმულები და რომელთა რადიუსებია შესაბამისად  $I_1$  და  $I_2$ .

ანალოგიურად თუ გვაქვს  $n$  თავისუფლების ხარისხის ინტეგრირებადი სისტემა, მასინ მისი ფაზური სივრცე  $n$  განზომილებიანია და ქმდება კუთხის ცვლადებში ის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც  $n$  განზომილებიან ტორთა სიმრავლე. ნებისმიერი ტრაექტორია განლაგდება ასეთ  $n$  განზომილებიან ტორზე, ამასთან ზოგიერთი ტრაექტორია იქნება ჩაკეტილი, ხოლო ზოგიერთი თანაბრად დაფარავს ასეთ ტორს.

ტორს განზომილებით  $n \geq 2$  მოცემული  $I_1, I_2, \dots, I_n$  მნიშვნელობებით, ეწოდება

რეზონანსული, თუ სისშირეთა  $\{\omega_i(I_1, I_2, \dots, I_n)\}$ ,  $i=1 \dots n$  კრებულისათვის

$$\text{სრულდება თანაფარდობა: } \sum_{i=1}^n k_i \omega_i(I_1, I_2, \dots, I_n) = 0 \quad (145)$$

სადაც  $k_i$  სიდიდეები რაღაც ნულისგან განსხვავებული მთელი რიცხვებია.

$n$  განზომილებიან სისტემის ჰამილტონის განტოლებების უმრავლესობა არ არის ინტეგრირებადი, მაგრამ რაღაც შემთხვევაში ჰამილტონიანი

$H = H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H(\theta_1, \dots, \theta_n, I_1, \dots, I_n)$  შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$H(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_0(\vec{I}) + \varepsilon H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) \quad (146)$$

სადაც  $H_0(\vec{I}) = H_0(I_1, \dots, I_n)$  წარმოადგენს ინტეგრირებად ნაწილს ხოლო

$H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) = H_1(\theta_1, \dots, \theta_n, I_1, \dots, I_n)$  ნაწილი წარმოადგენს მცირე შემფოთებას  $\varepsilon \ll 1$ .

(146) ტიპის სიტემებს ეწოდებათ სისტემები რომლებიც ახლოს არიან ინტეგრირებად სისტემებთან.

ქმდება-კუთხის ცვლადებში მოძრაობის განტოლებები შემდეგნაირად იწერება:

$$\dot{I}_i = -\varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \theta_i}; \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_i}; \quad i=1 \dots n \quad (147)$$

სადაც  $\varepsilon \ll 1$ . თუ  $\varepsilon = 0$  მაშინ (147) განტოლებათა სისტემა არის ინტეგრირებადი და მისი ამონახსნები ფარავენ  $n$  განზომილებიან ტორს. დაუშვათ ახლა  $\varepsilon \neq 0$ . რამდენად შეიცვლება ასეთ შემთხვევაში ინტეგრირებადი სისტემა?

ამ კითხვაზე პასუხი მნიშვნელოვანწილადაა დამოკიდებული თანაფარდობაზე გარე შემფოთების სისშირესა და სისტემის საკუთარ სისშირეს შორის. თუ სისტემის საკუთარი სისშირე ახლოსაა გარე ძალის სისშირესთან, მაშინ ამას მიყვარათ ამპლიტუდის ზრდამდე ანუ რეზონანსამდე. რადგანაც არაწრფივი სისტემებისათვის სისშირე დამოკიდებულია ქმედების  $I_i$ ,  $i=1 \dots n$  ცვლადებზე, რაღაც დროის შემდეგ სისტემა გამოვა რეზონანსიდან რასაც მოჰყვება

ამპლიტუდის შემცირება, რაც კვლავ გამოიწვევს სიხშირეს ცვლილებას, ამიტომაც სისტემა კვლავ აღმოჩნდება რეზონანსის მახლობლად. წარმოიქმნება ეგრეთ წოდებული ფაზური რხევები.

რეზონანსი შეიძლება წარმოიქმნას არა მარტო სისტემასა და გარე შემფოთებას შორის არამედ სისტემის სხვადასხვა თავისუფლების ხარისხებს შორისაც. ამ დროს ლაპარაკობენ შიდა რეზონანსებზე.

თუ რეზონანსი არ არის იზოლირებული, მაშინ რეზონანსების გადაფარვას მიეყავართ მოძრაობის ძალიან რთულ სურათამდე. გარდა ამისა რეზონანსები ხელს უშლის ვიპოვოთ მოძრაობის განტოლებების ამოხსნა შემფოთების თეორიის საშუალებით. შემფოთების თეორიაში საწყისი სისტემა აპროქსიმირდება მასთან ახლოს მყოფ ინტეგრირებად სისტემასთან და მასზე მცირე შემფოთების ზემოქმედებასთან, ხოლო ამონახსნებს ეძებენ  $\varepsilon$ -ის ხარისხების მიხედვით. რეზონანსების არსებობა არღვევს ამ მწკრივების კრებადობის საკითხს, რადგანაც რეზონანსები ცვლიან ფაზური ტრაექტორიების ტოპოლოგიას. შემფოთების თეორია ვერ აღწერს ასეთ რეზონანსებს, რადგანაც რეგულარული ამონახსნები მათ მახლობლად ძლიერადაა შემფოთებული, რასაც მიეყავართ მცირე მნიშვნელების გაჩენამდე და მწკრივები ხდება განშლადი.

პუანკარე იყო პირველი, რომელიც წააწყდა დინამიური სისტემების სტოხასტურობას [6]. სისტემის სეპარატრისის მახლობლად, რომელზედაც მოქმედებდა გარე პერიოდული შემფოთება, მან აღმოაჩინა ძალიან რთული ტრაექტორია, რომელსაც მან უწოდა ჰომოკლინური ტრაექტორია.

არაწრფივი რეზონანსის თეორია იმით არის შესანიშნავი, რომ საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ არარეგულარული მოძრაობის კრიტერიუმი ანალიზურად ჰამილტონურ სისტემებში. ეს კრიტერიუმი შემოტანილ იქნა ჩირიკოვის მიერ [26-27]. ქვემოთ განხილულია არაწრფივი რეზონანსის თეორია [27-30] მიხედვით.

გავშალოთ  $H_1(\vec{\theta}, \vec{I})$  ფუნქცია ფურიე მწკრივად:

$$H_1(\vec{\theta}, \vec{I}) = \sum_{\vec{k}} H_1^{\vec{k}}(\vec{I}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}} \quad (1.48)$$

ჩავსვათ (1.48) გაშლა (1.47)-ში, შედეგად მივიღებთ:

$$\dot{I}_i = -i\varepsilon \sum_{\vec{k}} H_1^{\vec{k}}(\vec{I}) k_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}}; \quad (1.49)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(\vec{I}) + \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{\partial H_1^{\vec{k}}}{\partial I_i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}};$$

აქ  $\vec{k}$   $n$  განზომილებიანი ვექტორია მთელი რიცხვითი კომპონენტებით,  $H_i^{\vec{k}}$

$$\text{ფურიე კოეფიციენტები, } \omega_i(\vec{I}) = \frac{\partial H_0(\vec{I})}{\partial I_i}.$$

ვეძებთ (1.49) სისტემის ამონახსნები მცირე  $\varepsilon$  პარამეტრის მიმართ ხარისხოვან მწკრივებად:

$$I_i = I_i^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s I_i^{(s)}; \quad (1.50)$$

$$\theta_i = \theta_i^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \theta_i^{(s)}; \quad i = 1 \dots n$$

(1.50)-ის (1.49)-ში ჩასმა მოგვცემს:

$$i_i^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s i_i^{(s)} = -i\varepsilon \sum_{\vec{k}} H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \vec{I}^{(s)} \right) \cdot k_i e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}}; \quad (1.51)$$

$$\dot{\theta}_i^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \dot{\theta}_i^{(s)} = \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \vec{I}^{(s)} \right) + \varepsilon \sum_{\vec{k}} \frac{\partial H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \vec{I}^{(s)} \right)}{\partial I_i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}};$$

გავითვალისწინოთ რომ:

$$\begin{aligned} H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \vec{I}^{(s)} \right) &= H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} + \varepsilon \vec{I}^{(1)} + \dots \right) = H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right) + \varepsilon \sum_{m=1}^n \frac{\partial H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right)}{\partial I_m^{(0)}} \cdot I_m^{(1)} + \dots, \\ \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \vec{I}^{(s)} \right) &= \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} + \varepsilon \vec{I}^{(1)} + \dots \right) \approx \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} \right) + \varepsilon \sum_m \frac{\partial \omega_i}{\partial I_m^{(0)}} I_m^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (1.52)$$

თუ ჩავსვავთ (1.52)-ს (1.51)-ში მაშინ შემფოტების თეორიის ნულოვან რიგში მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dot{I}_i^{(0)} = 0; \\ \dot{\theta}_i^{(0)} = \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} \right) \end{cases} \quad (1.53)$$

რომელიც მაშინვე ინტეგრირდება და გვაძლევს:

$$I_i^{(0)} = const; \theta_i^{(0)} = \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} \right) t + const \quad (1.54)$$

(1.54)-ის გათვალისწინებით გვექნება:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}} \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{\theta}^{(0)}} \approx e^{i \sum_{i=1}^n k_i \omega_i \left( \vec{I}^{(0)} \right) t} \cdot e^{i \cdot const \cdot \sum_{i=1}^n k_i} \quad (1.55)$$

(1.55)-ის გათვალისწინებით (1.51) განტოლებათა სისტემიდან შემფოტების თეორიის პირველ რიგში მივიღებთ:

$$\dot{I}_i^{(1)} = -i \sum_{\vec{k}} \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\omega} \left( \vec{I}^{(0)} \right) t}; \quad (1.56)$$

$$\dot{\theta}_i^{(1)} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial I_m^{(0)}} I_m^{(1)} + \sum_{\vec{k}} \frac{\partial \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right)}{\partial I_i} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\omega} \left( \vec{I} \right) t};$$

$$\text{სადაც } \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right) = H_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right) e^{i \cdot const \cdot \sum_{i=1}^n k_i}.$$

(1.56) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირება გვაძლევს:

$$I_i^{(1)} = - \sum_{\vec{k}} \frac{k_i \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right)}{\vec{k} \cdot \vec{\omega}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\omega} t}; \quad (1.57)$$

$$\theta_i^{(1)} = i \sum_{m=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial I_m^{(0)}} \cdot \sum_{\vec{k}} \frac{k_m \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right)}{\left( \vec{k} \cdot \vec{\omega} \right)^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{\omega} t} - i \sum_{\vec{k}} \frac{\partial \tilde{H}_1^{\vec{k}} \left( \vec{I}^{(0)} \right)}{\partial I_i} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{\omega} t}}{\vec{k} \cdot \vec{\omega}};$$

(1.57) გამოსახულებიდან ადვილია იმის დანახვა რომ თუ სრულდება პირობა

$$\vec{k} \cdot \vec{\omega} = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n \approx 0 \quad (1.58)$$

რომელსაც რეზონანსის პირობას უწოდებენ, (1.57) გამოსახულებებში ჩნდება წევრები, რომელთა მნიშვნელები ნულია ან ძალიან ახლოს არიან ნულთან,

ეს კი ძალიან ზრდის  $\theta_i^{(1)}$ ,  $I_i^{(1)}$  მნიშვნელობებს და არღვევს (1.57) მწკრივების კრებადობას.

თუ რეზონანსის პირობა არ სრულდება (1.57) პირველი მიახლოების განტოლებებში, მაშინ ის შეიძლება გამოჩნდეს უფრო მაღალი მიახლოების განტოლებებში  $s > 1$ . ასეთ რეზონანსებს  $s$  რიგის რეზონანსებს უწოდებენ.

დავუშვათ ახლა შეშფოთება  $H_1$  დამოკიდებულია დროზე და პერიოდულია  $T = 2\pi / \Omega$  პერიოდით ე.ი.  $H_1(\vec{\theta}, \vec{I}, t) = H_1(\vec{\theta}, \vec{I}, t + T)$ . თუ მას გავშლით ფურიე მწკრივად მივიღებთ:

$$H_1(\vec{\theta}, \vec{I}, t) = \sum_{k,m} H_1^{k,m}(\vec{I}) \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\theta} - m\Omega t)]$$

მაშინ ჰამილტონის განტოლებებისათვის მივიღებთ:

$$\dot{I}_i = -i\varepsilon \sum_{k,m} k_i H_1^{k,m} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\theta} - m\Omega t)]; \quad (1.59)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega(\vec{I}) + \varepsilon \sum_{k,m} \frac{\partial H_1^{k,m}}{\partial I_i} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\theta} - m\Omega t)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ ანალიზს, რაც გვექონდა ზემოთ, (ფორმულები (1.51)-1.57), მაშინ ნულოვანი მიახლოებისათვის გვექნება ისევ იგივე (1.54) ფორმულები, ხოლო პირველი მიახლოებისათვის (1.57) ფორმულების ნაცვლად გვექნება:

$$I_i^{(1)} = -\sum_{k,m} \frac{k_i \tilde{H}_1^{k,m}(\vec{I}^{(0)})}{\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega)t] + const,$$

$$\theta_i^{(1)} = i \sum_{l=1}^n \frac{\partial \omega_l}{\partial I_l^{(0)}} \cdot \sum_{k,m} \frac{k_l \tilde{H}_1^{k,m}(\vec{I}^{(0)})}{(\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega)^2} \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega)t] -$$

$$-i \sum_k \frac{\partial \tilde{H}_1^k(\vec{I}^{(0)})}{\partial I_i} \frac{\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega)t]}{\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega}; \quad (1.60)$$

აქაც თუ სრულდება რეზონანსის პირობა  $\vec{k} \cdot \vec{\omega} - m\Omega \approx 0$  მაშინ (1.60) გამოსახულებებში მწკრივები ხდება განშლადი, რაც წარმოადგენს მცირე მნიშვნელების პრობლემას.

დავუშვათ გვაქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი და შეშფოთება არის დროის პერიოდული ფუნქცია  $T = 2\pi / \nu$  და მოძრაობა აღიწერება ჰამილტონიანით:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(\theta, I, t), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.61)$$

გავშალოთ  $H_1$  ფურიე მწკრივად:

$$H_1(\theta, I, t) = \sum_{k,m} H_1^{k,m}(I) e^{i(k\theta - m\nu t)}; \quad (1.62)$$

მაშინ ჰამილტონის განტოლებები იღებენ შემდეგ სახეს:

$$\dot{I} = -i\varepsilon \sum_{k,m} k H_1^{k,m}(I) e^{i(k\theta - m\nu t)};$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \sum_{k,m} \frac{dH_1^{k,m}(I)}{dI} e^{i(k\theta - m\nu t)}; \quad (1.63)$$

$$H_1^{-k,-m} = H_1^{*k,m}.$$

თუ (1.63) განტოლებათა სისტემაში სრულდება პირობა  $k\omega(I) - m\nu = 0$ , მაშინ გვაქვს რეზონანსი. იმისათვის, რომ შევისწავლოთ სისტემის დინამიკა რეზონანსის მახლობლად, გამოვიყენოთ (1.62) გაშლაში მხოლოდ რეზონანსული წევრი და შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა გამოწვეული მხოლოდ ამ წევრით.

დავაფიქსიროთ  $k_0, m_0, I_0$  რიცხვების ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც რეზონანსის პირობა სრულდება ზუსტად:  $k_0 \omega(I_0) = m_0 \nu$ , ხოლო (1.63) განტოლებათა სისტემაში შევინარჩუნოთ მხოლოდ რეზონანსული წევრები მაშინ ვკეძნება:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -i \varepsilon k_0 H_1^{k_0 m_0}(I) \exp[i(k_0 \theta - m_0 \nu t)] + i \varepsilon k_0 H_1^{*k_0 m_0}(I) \exp[-i(k_0 \theta - m_0 \nu t)] = \\ &= 2 \varepsilon k_0 \frac{1}{2i} \left\{ |H_1^{k_0 m_0}| e^{i(\psi + k_0 \theta - m_0 \nu t)} - |H_1^{k_0 m_0}| e^{-i(\psi + k_0 \theta - m_0 \nu t)} \right\} = 2 \varepsilon k_0 |H_1^{k_0 m_0}| \sin(k_0 \theta - m_0 \nu t + \psi); \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon \frac{d}{dI} H_1^{k_0 m_0}(I) e^{i(k_0 \theta - m_0 \nu t)} + \varepsilon \frac{d}{dI} H_1^{*k_0 m_0}(I) e^{-i(k_0 \theta - m_0 \nu t)} = \\ &= \omega(I) + \varepsilon \frac{d}{dI} |H_1^{k_0 m_0}(I)| \cos(k_0 \theta - m_0 \nu t + \psi); \end{aligned} \quad (1.64)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:  $\varphi = k_0 \theta - m_0 \nu t + \psi$ ,  $H_1^{(0)} = 2 |H_1^{k_0 m_0}|$ . მაშინ (1.64) განტოლებათა სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\dot{I} = \varepsilon k_0 H_1^{(0)}(I) \sin \varphi; \quad (1.65)$$

$$\dot{\varphi} = k_0 \omega(I) - m_0 \nu + \varepsilon k_0 \frac{d}{dI} H_1^{(0)} \cos \varphi;$$

თუ (1.62) გაშლაშიც შევინარჩუნებთ მხოლოდ რეზონანსულ წევრებს ის შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$H_1(\theta, I, t) = H_1^{k_0 m_0}(I) e^{i(k_0 \theta - m_0 \nu t)} + H_1^{*k_0 m_0}(I) e^{-i(k_0 \theta - m_0 \nu t)} = 2 H_1^{(0)} \cos \varphi;$$

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1^{(0)} \cos \varphi. \quad (1.66)$$

დავუშვათ ახლა  $I$  სიდიდე საკმაოდ ახლოს არის  $I_0$ , ისე რომ გადახრა  $\Delta I = I - I_0$  არის მცირე სიდიდე, მაშინ  $H_0(I)$  და  $\omega(I)$  შეგიძლია გავშალოთ მწკრივებად  $\Delta I$ -ს მიხედვით:

$$H_0(I) = H_0(I_0) + \frac{\partial H_0}{\partial I} \Delta I + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} (\Delta I)^2 + \dots, \quad (1.67)$$

$$\omega(I) = \omega(I_0) + \frac{\partial \omega}{\partial I} \Delta I + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial I^2} (\Delta I)^2 + \dots, \quad (1.68)$$

თუ (1.67) გამოსახულებაში შემოვისაზღვრებით მხოლოდ მეორე რიგის წევრებით, ხოლო (1.68) გამოსახულებაში პირველი რიგის წევრებით. გარდა ამისა თუ ავიღებთ  $H_1^{(0)}(I)$ -ს  $I_0$  წერტილში, გავითვალისწინებთ  $k_0 \omega(I_0) = m_0 \nu$  რეზონანსის პირობას და (1.65)-ის მეორე განტოლებაში  $\varepsilon$  რიგის წევრს უგულებელვყოფთ, მაშინ (1.65) განტოლებათა სისტემის ნაცვლად მივიღებთ ასეთ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dt} \Delta I = \varepsilon k_0 H_1^0 \sin \varphi; \quad \dot{\varphi} = k_0 \frac{d\omega(I_0)}{dI} \Delta I, \quad (1.69)$$

$$H = H_0(I_0) + \omega(I_0) \Delta I + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega(I_0)}{\partial I} (\Delta I)^2 + \varepsilon H_1^0 \cos \varphi, \quad (1.70)$$

$$H_1^0 \equiv H_1^{(0)}(I_0).$$

ადვილი დასანახია რომ (1.69) განტოლებათა სისტემა შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ჰამილტონიანიდან:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}k_0 \frac{d\omega(I_0)}{dI} (\Delta I)^2 + \varepsilon k_0 H_1^0 \cos \varphi \quad (1.71)$$

ამ ჰამილტონიანს ეწოდება არაწრფივი რეზონანსის უნივერსალური ჰამილტონიანი [29-31].

აქ კანონიკურად შეუღლებულ ცვლადებს წარმოადგენს  $\Delta I$  და  $\varphi$ , მათთვის ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები იწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial(\Delta I)} \quad (1.72)$$

კანონიკური გარდაქმნა, რომელიც საშუალება გვაძლევს (1.70) ჰამილტონიანიდან გადავიდეთ (1.71) ჰამილტონიანზე არის შემდეგი:

$$\bar{H} = k_0 H - m_0 v \Delta I - k_0 H_0(I_0) \quad (1.73)$$

(1.71) ჰამილტონიანი ძალიან ჰგავს არაწრფივი საქანის (1.42) ჰამილტონიანს სადაც მასის როლს თამაშობს  $m = (k_0 d\omega(I_0)/dI)^{-1}$  სიდიდე, ხოლო საქანის სიგრძე  $l=1$ . (1.69) განტოლებათა სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\ddot{\varphi} - \Omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (1.74)$$

ჩასმით  $\tilde{\varphi} = \varphi + \pi$  (36) განტოლება დადის არაწრფივი საქანის განტოლებაზე

$$\ddot{\tilde{\varphi}} + \Omega_0^2 \sin \tilde{\varphi} = 0 \quad (1.75)$$

(1.75) განტოლება შეესაბამება არაწრფივ ფაზურ რხევებს ფაზურ სივრცეში, სადაც  $\Omega_0^2 = \varepsilon k_0^2 H_1^0 |d\omega(I_0)/dI|$  თამაშობს მცირე ფაზური რხევების სიხშირის როლს.

როგორც არაწრფივი საქანის თეორიიდან არის ცნობილი, საქანის ფაზურ სივრცეში არსებობს განსაკუთრებული ტრაექტორია, სეპარატრისა რომელიც ერთმანეთისაგან გამოყოფს რხევით და ბრუნვით რეჟიმებს. ეს ტრაექტორია განისაზღვრება ქანქარას ენერგიით, რომელიც ტოლია მაქსიმალური პოტენციალური ენერგიის, (1.71)-დან:  $H_s = \varepsilon k_0 H_1^0$ . აქედან შეგვიძლია განვსაზღვროთ სეპარატრისას განტოლება:

$$\Delta I = \pm 2 \left( \frac{\varepsilon H_1^0}{d\omega(I_0)} \right)^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (1.76)$$

სადაც  $\pm$  შეესაბამება სეპარატრისას სხვადასხვა შტოს (ნახ.1.15 ა). ამ შტოებს შორის მაქსიმალურ მანძილს ეწოდება არაწრფივი რეზონანსის სიგანე. (1.76)-დან არაწრფივი რეზონანსის სიგანისთვის ვიღებთ:

$$\max \Delta I = 2 \left( \frac{2\varepsilon H_1^0}{d\omega(I_0)} \right)^{1/2} \quad (1.77)$$

ანდა სიხშირის მიხედვით:

$$\max \Delta \omega = \frac{d\omega(I_0)}{dI} \max \Delta I = 2 \sqrt{2\varepsilon H_1^0 \left( \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right)} \quad (1.78)$$

განვსაზღვროთ რამდენად სამართლიანია ის მიახლოებები რომლებიც გავაკეთეთ ზემოთაგრეთვე შევავასოთ (1.77) და (1.78) გამოსახულებების რიგი.

(1.71) ჰამილტონიანიდან გამომდინარეობს რომ  $H_0 \sim H_1^0$ . მაგრამ რადგანაც  $H_0 \sim I_0 \omega(I_0)$  ამიტომ:  $H_0 \sim H_1^0 \sim I_0 \omega(I_0)$ . (1.79)

(1.77) და (1.78)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \frac{\left( \varepsilon H_1^0 \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right|^{-1} \right)^{1/2}}{I_0} \sim \frac{\left( \varepsilon I_0 \omega(I_0) \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right|^{-1} \right)^{1/2}}{I_0} = \left( \frac{\varepsilon \omega(I_0)}{\left| \frac{d\omega}{dI} \right| I_0} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}, \quad (1.80)$$

$$\frac{\max(\Delta \omega)}{\omega(I_0)} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon H_1^0 \frac{d\omega(I_0)}{dI}}}{\omega(I_0)} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon I_0 \omega(I_0) \frac{d\omega(I_0)}{dI}}}{\omega(I_0)} = \sqrt{\varepsilon \gamma} \quad (1.81)$$

სადაც  $\gamma = \left( \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \cdot \frac{I_0}{\omega(I_0)} \right)$  არაწრფივობის პარამეტრია.

გარდა ამისა  $\dot{\phi}$ -ის განტოლებაში ჩვენ გადავადეთ  $\sim \varepsilon$  რიგის წევრები. (1.65) და (1.67)-ის თანახმად ეს შესაძლებელია მაშინ როდესაც:

$\varepsilon \frac{dH_1^0(I_0)}{dI} \ll \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \Delta I$ . მაგრამ რადგანაც  $\frac{dH_1^0}{dI} \sim \frac{dH_1^0}{dI_0} \sim \frac{H_1^0}{I_0}$  ამიტომ გვქვია:

$\varepsilon \frac{H_1^0(I_0)}{I_0} \ll \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \Delta I$ , ანდა რადგანაც  $H_1^0 \sim I_0 \omega(I_0)$  ამიტომ ბოლო ტოლობა

ასე შეგვიძლია გადავწეროთ:

$$\varepsilon \ll \frac{d\omega(I_0)}{dI} \cdot \frac{\Delta I}{\omega(I_0)} \leq \frac{d\omega(I_0)}{dI} \cdot \frac{\max \Delta I}{\omega(I_0)} \sim \frac{d\omega(I_0)}{dI} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \cdot \frac{I_0}{\omega(I_0)} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \cdot \gamma = \sqrt{\varepsilon \gamma}.$$

საიდანაც  $\varepsilon \ll \gamma$ .

მეორეს მხრივ მხოლოდ რეზონანსული წევრების შენარჩუნება და არარეზონანსული წევრების გადაყრა იმას ნიშნავს, რომ სხვა სიხშირეები (1.68)

გაშლაში არ ცვლიან დინამიკას ე.ი. როდესაც  $\omega(I_0) \gg \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \Delta I$  აქედან

$\left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \cdot \frac{\Delta I}{\omega(I_0)} \ll 1$ . (1.80)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \cdot \frac{\Delta I}{\omega(I_0)} \sim \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \cdot \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} I_0}{\omega(I_0)} \ll 1 \text{ საიდანაც } \sqrt{\gamma \varepsilon} \ll 1 \text{ ანდა } \gamma \ll \frac{1}{\varepsilon}.$$

ამრიგად მივიღეთ რომ არაწრფივი რეზონანსის თეორია მუშაობს მაშინ

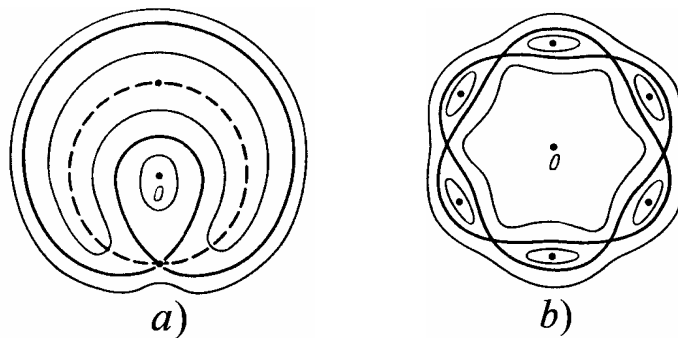
$$\text{როდესაც: } \varepsilon \ll \gamma \ll \frac{1}{\varepsilon} \quad (1.82)$$

შესაბამისად ზღვრული გადასვლა წრფივ ამოცანაზე  $\gamma \rightarrow 0$  არ არსებობს. შევნიშნოთ არაწრფივი რეზონანსის სამი თავისებურება. ჯერ ერთი როგორც (1.80) და (1.81)-დან გამომდინარეობს,  $\Delta I / I_0$  და  $\Delta \omega / \omega$  პროპორციულია  $\varepsilon^{1/2}$ -ს და არა  $\varepsilon$ -ის, როგორც ეს შემოთქმის ჩვეულებრივ თეორიაში. როდესაც  $\varepsilon \ll 1$  უტოლობა  $\varepsilon^{1/2} \gg \varepsilon$  გვიჩვენებს რომ ეს ცვლილებები დიდია. ფაქტიურად



შეშფოთების თეორია იგება  $\varepsilon^{1/2}$  პარამეტრის მიხედვით. შემდეგ არაწრფივი რეზონანსი გვაქვს, როდესაც სისტემაში საკმაოდ დიდია არაწრფივობა  $\gamma \gg \varepsilon$ . მოძრაობის ხასიათი განისაზღვრება არა თვით  $\varepsilon$ -ით და  $\gamma$ -ით, არამედ მათი თანაფარდობით.

ფაზური რხევების მთავარ თავისებურებას წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ ფაზურ სივრცეში გაჩნდა სეპარატრისა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფაზურ სივრცეში გაჩნდა დამატებითი განსაკუთრებული ელიფსური და ჰიპერბოლური წერტილები, როგორც ეს გამოძინარეობს არაწრფივი საქანის ფაზური პორტრეტიდან (იხ.ნახ.1.15 ა). საწყის ფაზურ სივრცეში  $(p, q)$  ზუსტ რეზონანსს შეესაბამება ფაზური მრუდი ქმედებით  $I_0$  (წყვეტილი ხაზი ნახ.1.16-ზე).  $\theta$  კუთხიდან  $\varphi$  კუთხეზე გადასვლას შეესაბამება მბრუნავ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლა  $m_0\nu$  სიხშირით. ბრუნავ კოორდინატთა სისტემაში არაწრფივი რეზონანსის ორი სხვადასხვა შემთხვევისთვის ფაზური მრუდები წარმოდგენილია ნახ.1.16-ზე. როგორც ამ ნახაზებიდან ჩანს  $k_0$  რიგის რეზონანსს შეესაბამება  $k_0$  სეპარატრისული უჯრედის გაჩენა,  $k_0$  ელიფსური და  $k_0$  ჰიპერბოლური წერტილებით. ამრიგად არაწრფივი რეზონანსი ცვლის ფაზური სივრცის ტოპოლოგიას.



ნახ. 1.16 a) არაწრფივი რეზონანსი  $k_0 = 1, m_0 = 1$   $(p, q)$  ფაზურ სივრცეზე.

დაშტრიხული ხაზი წარმოადგენს შეუშფოთებელ ტრაექტორიას  $I = I_0$ . წვრილი ხაზები შეესაბამება ფაზურ რხევებს. მსხვილი ხაზი შეესაბამება ფაზური რხევების სეპარატრისას. b) არაწრფივი რეზონანსის გართულებული ვარიანტი.  $k_0 = 6, m_0 = 1$ .

ზემოთ განხილული თეორია მოყვანილი იყო იმ დაშვებით რომ  $I$  სიდიდე ფიქსირებულია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ არსებობს მხოლოდ ერთი იზოლირებული რეზონანსი. მაგრამ სინამდვილეში რეზონანსული პირობა  $k\omega(I) - m\nu \approx 0$  შეიძლება სრულდებოდეს სხვა  $I_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  მნიშვნელობებისათვის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ პირველადი რეზონანსები სისტემაში შეიძლება იყოს ბევრი და რეზონანსის პირობა როცა  $k = 1$  დაიწერება ასე  $\omega(I_m) \approx m\nu$ . შესაბამისად შეიძლება შემოტანილ იქნას რეზონანსებს შორის მანძილი ქმედებით  $\delta I_m = I_{m+1} - I_m$  ანდა სიხშირით  $\delta\omega_m = \omega(I_{m+1}) - \omega(I_m)$ . თუ  $I_m$ -ის ყველა მნიშვნელობები არიან ერთმანეთისაგან საკმაოდ შორს ე.ი.  $\delta I_m \gg \Delta I_m$ , სადაც  $\Delta I_m$  განისაზღვრება (1.77) ტოლობით, მაშინ რეზონანსების სეპარატრისები არ გადაიკვეთება და რეზონანსები არ ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან. თუ საწყისი პირობები ისეა შერჩეული რომ სისტემა მოხვდება ერთ-ერთი რეზონანსის მახლობლად, მაშინ სხვა რეზონანსების გავლენა შეიძლება არ იქნას გათვალისწინებული, დინამიკის აღწერა მოხდეს მხოლოდ ამ

რეზონანსის გავლენის გათვალისწინებით. თუ საწყისი წერტილი მოხდება რეზონანსებს შორის მაშინ სისტემის დინამიკა შესწავლილი შეიძლება იქნას არერეზონანსულ მიახლოებაში [12, 32-33]

ანალოგიურად შეიძლება განვსაზღვროთ რეზონანსების არგადაფარვის პირობა სისშირეების მიხედვით:  $\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m$ .

დავუშვათ ახლა რომ რეზონანსები იმდენად ახლოს არიან ერთმანეთთან რომ მათი სეპარატრისები გადიფაროს, ამ დროს შემოყავთ  $K'$  პარამეტრიც რომელიც ახასიათებს რეზონანსების გადაფარვის ხარისხს:

$$K' = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \frac{\Delta I}{\delta I}. \quad (1.83)$$

(1.78)-ის თანახმად: 
$$K' = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon H_1^m \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right)}}{\nu}.$$

(1.79)-ის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ, რომ  $H_1^m \sim I_m \omega(I_m)$ , მაშინ თუ გავითვალისწინებთ რეზონანსულ თანაფრდობას  $\omega(I_m) \approx m\nu$   $K$ -სთვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$K' \sim \frac{\sqrt{\varepsilon H_1^m \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right)}}{\nu} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon I_m \omega(I_m) \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right)}}{\omega(I_m)} = \sqrt{\varepsilon \frac{I_m}{\omega(I_m)} \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right)} = \sqrt{\varepsilon \gamma_m} \quad (1.84)$$

სადაც  $\gamma_m = \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right) \cdot \frac{I_m}{\omega(I_m)}$  არწრფივობის პარამეტრია.

როდესაც  $K' \ll 1$  რეზონანსებს შორის ურთიერთქმედება მცირეა, ანდა  $\gamma_m \ll \frac{1}{\varepsilon}$  რაც იმას ნიშნავს რომ სისტემის არაწრფივობა საკმარისად მცირეა რომ მოხდეს რეზონანსების გადაფარვა და მოძრაობა სისტემაში უნდა იყოს რეგულარული.

თუკი  $K' > 1$  ანდა  $\gamma_m > \frac{1}{\varepsilon}$  რაც იმას ნიშნავს რომ სისტემის არაწრფივობა არის საკმარისად დიდი, მაშინ ადგილი აქვს რეზონანსების გადაფარვას და სისტემის დინამიკა ხდება ძალიან რთული.

ამრიგად სისტემაში  $\varepsilon$  რიგის მცირე შეშფოთების შეტანით, თუკი სისტემაში არსებობს რამდენიმე რეზონანსი და სისტემის არაწრფივობა  $\gamma_m > \frac{1}{\varepsilon}$ , მაშინ შეიძლება მოხდეს რეზონანსების გადაფარვა და სისტემაში მოძრაობა იქნება ძალიან რთული განსხვავებული პერიოდული და კვაზიპერიოდული მოძრაობისაგან.

ამრიგად სისტემაში ქაოსის გაჩენის ერთ-ერთი წინაპირობაა მისი არაწრფივობა. თუკი სისტემაში არსებობს არაწრფივობა, მაშინ რაგინდ მცირე შეშფოთებაც არ უნდა შევიტანოთ სისტემაში, თუკი არაწრფივობა  $\gamma_m > \frac{1}{\varepsilon}$ , მაშინ სისტემაში შეიძლება გაჩნდეს ქაოსი.

რეზონანსების გადაფარვა შემოტანილი იქნა ჩირიკოვის მიერ [28], როგორც ჰამილტონური სისტემების მახასიათებელი.

ზემოთ აღნიშნული პრობლემა თუ რა გავლენას ახდენს მცირე შეშფოთება სისტემის დინამიკაზე გადაწყვეტილ იქნა მხოლოდ გასული

საუკუნის 60-იან წლებში ცნობილი კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის თეორიით (კამ-თეორია). 1954 წელს კოლმოგოროვის მიერ ჩამოყალიბებული იქნა ცნობილი თეორემა ინვარიანტული ტორების შენახვის შესახებ [34], რომელიც დამტკიცებული იქნა არნოლდის [35] და მოზერის [36] მიერ. კამ-თეორიას საფუძვლად უდევს კოლმოგოროვის თეორემა, რომელიც ამტკიცებს რომ სრულიად ინტეგრირებადი სისტემის მცირე შემფოთებისას არარეზონანსული ტორების დიდი უმრავლესობა ინახება და განიცდიან მცირე დეფორმაციას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყველა რეზონანსული ტორი (რომლებზეც ხდება პერიოდული მოძრაობა) და არარეზონანსული ტორების ნაწილი შემფოთების შედეგად ინგრევა, მაგრამ ეს სიმრავლე მცირეა იმ არარეზონანსულ ტორებთან შედარებით, რომლებიც შემფოთების შედეგად ინახება.

იმისათვის რომ შესრულდეს კამ-თეორია საჭიროა:

1. შემფოთებელი სისტემის სისწირეები უნდა იყოს ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი, რაც ნიშნავს რომ უნდა შესრულდეს პირობა:

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_k} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_k} \right| \neq 0; \quad i = 1..n;$$

2. შემფოთება უნდა იყოს გლუვი ე. ი. საჭიროა რომ  $H_1$  ჰამილტონიანს ჰქონდეს წარმოებულების საკმაო რიცხვი;
3. სისტემა უნდა იმყოფებოდეს რეზონანსის გარეთ:

$$\left| \sum_j k_j \omega_j \right| > c |k|^{-r}, \quad k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

სადაც  $r$  დამოკიდებულია სისტემის  $n$  თავისუფლების ხარისხზე, ხოლო  $c$  მუდმივა განისაზღვრება  $\varepsilon H_1$  შემფოთების სიდიდით.

თუ ეს პირობები სრულდება, მაშინ კამ-თეორიის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ საწყისი პირობების დიდი უმრავლესობისათვის სისტემებში, რომლებიც ახლოს ინტეგრირებულ სისტემებთან, მოძრაობის კვაზიპერიოდული ხასიათი ინახება.

მაგრამ არსებობს ისეთი საწყისი პირობები, რომლის დროსაც  $\varepsilon = 0$  დროს არსებული რეზონანსული ტორები ინგრევა და მოძრაობა ხდება არარეგულარული. სწორედ ამ დარღვეული ტორებს მიჰყავთ სისტემა ქაოსამდე, ტრაექტორიებს, რომლებიც იწყებიან დარღვეული ტორების არეში შეუძლიათ თავისუფლად იხეტიალონ ენერგეტიკულ ზედაპირზე. ამავე დროს ასეთი ტრაექტორიები იქნებიან ექსპონენციალურად არამდგრადი მცირე შემფოთების მიმართ.

მცირე  $\varepsilon$ -ის დროს რეზონანსისაგან შორს მდგარი ტორები ინახება, ნებისმიერი გლუვი შემფოთების მიმართ. მაგრამ  $\varepsilon$ -ის ზრდით სურათი იცვლება, ტორები იწყებენ დაშლას და ქაოსურობის არე იზრდება. ბოლოს და ბოლოს ამას მიყვავართ რეზონანსების გადაფარვამდე და წარმოიქმნება მოვლენა რომელსაც დინამიკაში ეწოდება გლობალური ქაოსი.

გლობალური ქაოსის დროს არ რჩება არც ერთი ტორი, რომელიც ახლოს იყო შემფოთებულ ტორებთან, მაგრამ შეიძლება წარმოიქმნას ახალი ტორები. ფაზური ტრაექტორია ასეთ სისტემაში გადის ქაოსურ ფენებზე.

მხოლოდ როცა  $\varepsilon \ll 1$  რეზონანსები არ გადაიფარება და ამონახსნები ძვეს მცირედ დეფორმირებულ ინვარიანტულ ტორებზე. ამ დროს ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ სისტემები ორი თავისუფლების ხარისხით და სისტემები  $n > 2$  თავისუფლების ხარისხით. განსხვავება ის არის რომ, როცა  $n = 2$  ტორები რომლებიც შეესაბამება ქმედების სხვადასხვა  $(I_1, I_2)$  მნიშვნელობებს ჩადგმულნი არიან ერთმანეთში, ამიტომ ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ. ამ

შემთხვევაში ამბობენ რომ ტორები ყოფენ სივრცეს. დაშლილი ტორები შეიძლება მოთავსებულნი იყვნენ მდგრად ტორებს შორის. ამიტომაც ქმდების ცვლადები თითქმის არ იცვლება და ისინი რჩებიან თავისი საწყისი მნიშვნელობის მახლობლად. ამიტომაც სისტემებისათვის ორი თავისუფლების ხარისხით, რომლებიც აკმაყოფილებენ კამ-თეორიას საწყისი პირობების ყველა მნიშვნელობისათვის ევოლუცია არ გვაქვს და გვაქვს გლობალურად მდგრადი სისტემა.

როცა  $n > 2$ ,  $n$  განზომილებიანი ტორები უკვე აღარ ყოფენ  $2n-1$  განზომილებიან ენერგეტიკულ ზედაპირს და დაშლილი რეზონანსული ტორების არეები ერთმანეთს უერთდება და წარმოქმნის ერთიან ქსელს, ეგრეთ წოდებულ არნოლდის აბლაბუდას. ფაზური წერტილი რომელიც მოძრაობს ამ აბლაბუდის ქსელში შეიძლება აღმოჩნდეს თავისი საწყისი მდგომარეობიდან საკმაოდ შორს-წარმოიქმნება ეგრეთ წოდებული არნოლდის დიფუზია [12]. არნოლდის დიფუზიის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისება ის არის, რომ არ არსებობს  $\varepsilon$ -ის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომელიც საჭიროა მისი არსებობისათვის, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ამ დიფუზიას ადგილი აქვს ნებისმიერი მცირე  $\varepsilon$ -ების დროს. შესაბამისად ჰამილტონური სისტემებისათვის, რომლებიც ახლოს არიან ინტეგრირებად სისტემებთან, როცა თავისუფლების ხარისხი  $n > 2$  გლობალური მდგრადობა არა გვაქვს. არსებობს არნოლდის დიფუზიის მრავალი მაგალითი [37-39].

მოვიყვანოთ უბრალო მტკიცებულება იმისა, თუ რატომ ყოფენ ტორები სივრცეს მხოლოდ როდესაც  $n=2$ .  $2n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში მუდმივი ენერჯიის ზედაპირს აქვს განზომილება  $2n-1$ , ხოლო საზღვრებს რომელიც მას ყოფს სხვადასხვა არეებად აქვს  $2n-2$  განზომილება. იმისათვის რომ ტორებმა გაყოს სივრცე მათი განზომილება  $n$  უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას  $n \geq 2n-2$ , აქედან  $n \leq 2$ .

დავუშვათ მოცემული გვაქვს დინამიური სისტემა, რომელიც ხასიათდება  $x_1, \dots, x_n$  დინამიური ცვლადებით და  $h(x_1, \dots, x_n) = h(\vec{x})$  ამ ცვლადების ინტეგრებადი ფუნქციაა.  $h$  ფუნქცია ზოგადად დამოკიდებული იქნება დროზეც  $h = h(\vec{x}(t))$ .

ამ სიდიდის დროითი საშუალო ეწოდება სიდიდეს 
$$\bar{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\vec{x}(t)) dt.$$

დავუშვათ სისტემის მოძრაობა ხდება ფაზური სივრცის შემოსაზღვრულ  $D$  არეში ფაზური მოცულობით  $V_D$  მაშინ ფაზური საშუალო განისაზღვრება

შემდეგნაირად: 
$$\langle h \rangle = V_D^{-1} \int_{(D)} h(\vec{x}) dV, \quad dV \equiv dx_1 \dots dx_n.$$

დინამიურ სისტემას ეწოდება ერგოდიული თუ მისი დროითი და ფაზური საშუალოები ერთმანეთის ტოლია [21-22,30,40]:  $\bar{h} = \langle h \rangle$ .

დავუშვათ დინამიური სისტემის მოძრაობას ვაკვირდებით საკმაოდ დიდი  $T \rightarrow \infty$  დროის განმავლობაში. გამოვყოთ ფაზური სივრცის  $D$  არეში სადაც ხდება სისტემის მოძრაობა, მოცულობა  $\Omega \in D$ . ავღნიშნოთ  $T_\Omega$ -ით დრო რომლის განმავლობაშიც სისტემა მოხვდება  $\Omega$  არეში  $\vec{x}(t) \in \Omega$ . თუ ფაზური ტრაექტორიები თანაბრად ავსებენ ფაზურ სივრცეს. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ ფაზურ სივრცეში მოძრაობისას  $\vec{x}(t)$  ფაზური წერტილი მოხვდება  $\Omega$

არეში ტოლია  $\frac{V_\Omega}{V_D}$ . სისტემის მოძრაობა ერგოდიულია თუ: 
$$\frac{T_\Omega}{T_D} = \frac{V_\Omega}{V_D}.$$

სისტემის ერგოდულობა არ არის საკმარისი მისი ქაოტიზაციისთვის. ამის მაგალითს წარმოადგენს ორი ოსცილატორი რომელთა ტრაექტორიები თანაბრად ფარავენ ორგანზომილებიან ტორს. ასეთ სისტემაში ქაოსური მოძრაობა შეუძლებელია თუმცა მოძრაობა ერგოდულია. ამ მოძრაობისთვის დამახასიათებელია, რომ ინახება ფაზური სივრცის არა მარტო მოცულობა არამედ ფორმაც. მაგრამ არსებობს დინამიური სისტემები, რომლებისთვისაც საწყისი მოცულობა  $\Omega_0$  ფაზურ სივრცეში მოძრაობისას ძლიერად დეფორმირდება. ამას მიეყვართ იქამდე, რომ რაღაც დროის შემდეგ  $\Omega_0$  საწყისი არე გადანაწილდება მთელ ენერგეტიკულად დასაშვებ არეებში ანუ ჰიპერხედაპირზე, ისე რომ მისი მისი ნაწილები შეგვიძლია აღმოვაჩინოთ ენერგეტიკული ჰიპერხედაპირის ნებისმიერ არეში, დამოუკიდებლად  $\Omega_0$ -ის საწყისი ფორმისა და ზომებისა. ასეთ მოძრაობას ეწოდება მოძრაობა ადრევიტ [21-22, 29-30].

იმისათვის რომ დავახასიათოთ მოძრაობა ადრევიტ, განვიხილოთ ფაზური სივრცის ორი არე  $A$  და  $B$  მოცულობებით  $V(A)$  და  $V(B)$ . ჩავთვალოთ რომ  $B$  არე რჩება უძრავი, ხოლო  $A$  არე იცვლება დროის განმავლობაში  $A_t = F^t A$ , სადაც  $F^t$  ევოლუციის ოპერატორია, რომელსაც  $A$  არე გადაჰყავს  $A_t$  არეში. დაუშვათ  $A_t \cap B$  წარმოადგენს  $A_t$ -ს იმ ნაწილს, რომელიც დროს  $t$  მომენტში ევოლუციის შემდეგ მოხვდება  $B$  არეში. დინამიური სისტემის მოძრაობას ფაზურ სივრცეში ეწოდება მოძრაობა ადრევიტ თუ არსებობს ზღვარი  $t \rightarrow \infty$ , რომელიც ტოლია [21-22]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(A_t \cap B)}{V(B)} = \frac{V(A)}{V(D)}; \quad (1.85)$$

ლიუვილის თეორემის თანახმად  $V(A) = V(A_t)$ , ამიტომ  $\frac{V(A)}{V(D)} = \frac{V(A_t)}{V(D)}$  არის ფარდობითი მოცულობა რომელსაც იკავებს  $A$  არე  $D$ - არეში, ხოლო  $\frac{V(A_t \cap B)}{V(B)}$  არის ფარდობითი მოცულობა, რომელსაც იკავებს დროის  $t$

მომენტში  $B$ -ში მოხვედრილი  $A_t$  არის ნაწილები. (1.85) პირობის თანახმად, ეს ორი ფარდობა ერთმანეთს ემთხვევა, როგორც არ უნდა იყოს  $A$  და  $B$  არეების ზომები, ფორმა და ურთიერთგანლაგება.

აქედან გამომდინარეობს რამდენიმე მნიშვნელოვანი შედეგი [21-22]:  $B$  არე შეგიძლია ავიღოთ რაც შეიძლება მცირე და განლაგებული ნებისმიერად ენერგეტიკულ ზედაპირზე. მიუხედავად ამისა დიდი  $t$  დროის გასვლის შემდეგ  $B$  არეში აღმოჩნდებიან  $A_t = F^t A$  არის ნაწილები. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $t \rightarrow \infty$  დროში  $A_t$  არის ნაწილები აღმოჩნდებიან ენერგეტიკული ზედაპირის ნებისმიერად არჩეული წერტილის მახლობლობაში. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ საწყისი  $A$  არე გადაიქცევა ძალიან წვრილ აბლაბუდად, რომელიც ფარავს მთელ ენერგეტიკულ ზედაპირს, ისე რომ ამ აბლაბუდას ჯამური მოცულობა საწყისი  $A$  არის მოცულობის ტოლია.

ასეთ სისტემებში შეუძლებელია ვიწინასწარმეტყველოთ სისტემის საბოლოო მდგომარეობა, რადგანაც ნებისმიერი ფიზიკური სისტემის საწყისი მდგომარეობა შეიძლება ცნობილი იყოს მხოლოდ რაღაც სასრული სიზუსტით. ამას შეიძლება ის ინტერპრეტაცია გაუკეთოთ, რომ საწყისი პირობები მოიცემა არა რაღაც ერთი  $X_0$  საწყისი წერტილით ფაზურ სივრცეში, არამედ

რაღაც არით  $\Omega_\varepsilon \subset D$  ფაზურ სივრცეში. ამ არის მახასიათებელი ზომებია  $\varepsilon$ . თუ სისტემა ხასიათდება აღრევითი მოძრაობით, ეს საწყისი არე  $t \rightarrow \infty$  დროის შემდეგ განაწილდება მთელ  $D$  არეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ფაზური წერტილის მდებარეობა ცნობილია სასრული სიზუსტით ე.ი. ვიცოდით რომ დროის  $t=0$  მომენტში ეს წერტილი ეკუთვნოდა  $\Omega_\varepsilon$  არეს, მაშინ იმის თქმა, რომ სად აღმოჩნდება ის საკმაოდ დიდი დროს შემდეგ შეუძლებელია. (საწყისი პირობების მიმართ მგრძობიარობა). სისტემის აღრევას მივყავართ შეუქცევადობამდე. მართლაც რომ ავიღოთ ენერგეტიკული ზედაპირის რაიმე არე, ამ არეში საკმაოდ დიდი დროის შემდეგ აღმოჩნდებიან ფაზური სივრცის ნაწილები, რომლებიც ეკუთვნოდნენ სხვადასხვა საწყისი პირობების არეებს. ნებისმიერ ფიზიკურ ექსპერიმენტში ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობა ვიცით რაღაც სიზუსტით. ე.ი. ვექტორი რომელიც აღწერს საბოლოო მდგომარეობას  $\vec{X}(t)$ , ეკუთვნის რაღაც  $\varepsilon$  ზომის მცირე არეს, რადგანაც ამ არეში შეიძლება მოხვდნენ წერტილები, რომლებსაც სხვადასხვა საწყისი პირობები ჰქონდათ. ამიტომ ჩვენ არ შეგიძლია ვთქვათ თუ დროის საწყის  $t=0$  მომენტში სად იმყოფებოდა  $\vec{X}(t)$  წერტილი, ე.ი. აღრევითი მოძრაობის დეტერმინირებული აღწერა შეუძლებელია და საჭირო ხდება სტატისტიკური მახასიათებლების შემოტანა.

სისტემების, სადაც ხდება მოძრაობა აღრევით, ერთ-ერთი დამახასიათებელი სიდიდეა კოლმოგოროვის ენტროპია. განვიხილოთ ფაზური სივრცის რაიმე მცირე უჯრედი. როდესაც ხდება მოძრაობა აღრევით, ის უნდა განერთხეს მთელ ფაზურ სივრცეში. ეს იმას ნიშნავს რომ წერტილები რომლებიც ახლოს იყვნენ ერთმანეთთან დროის საწყის მომენტში, რაღაც დროის შემდეგ ერთმანეთს შორდებიან და მოძრაობენ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად. ამიტომაც აღრევითი მოძრაობა მოსალოდნელია ისეთ არამდგრად სისტემებში, რომლებშიც დროის განმავლობაში ფაზური ტრაექტორიები სწრაფად სცილდებიან ერთმანეთს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ საწყისი პირობების რაგინდ მცირე შემფოთებას მივყავართ ფაზური ტრაექტორიების რაგინდ დიდ დაცილებამდე შეუშფოთებელი მოძრაობის ტრაექტორიისაგან. ამ დროს ამბობენ რომ ადგილი აქვს ლოკალურ არამდგრადობებს, ეს კი იმას ნიშნავს რომ არსებობს მიმართულებები ფაზურ სივრცეში, საითკენაც მანძილი ორ ფაზურ წერტილს შორის იზრდება ექსპონენციალურად [12, 30]:

$$D(t) = D(0)e^{h_0 t} \tag{1.86}$$

სადაც  $h_0 = \sum_k \lambda_k$ ,  $\lambda_k$  ლიაპუნოვის დადებითი მაჩვენებლებია  $\lambda_k > 0$ . მაშინ კოლმოგოროვის ენტროპია განისაზღვრება შემდეგნაირად [30]:  $h = \langle h_0 \rangle$ , სადაც  $\langle \rangle$  აღნიშნავს ფაზურ საშუალოს. თავისი განმარტებით ქაოსური სისტემებისათვის კოლმოგოროვის ენტროპია ყოველთვის დადებითია:  $h > 0$ .

სისტემებში, რომლებშიც ხდება მოძრაობა აღრევით ადგილი აქვს კორელაციების გაწყვეტას [21-22, 29-30, 38]:

$$P(f; g; t) = \langle f(F^t x) g(x) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(x) \rangle = 0 \tag{1.87}$$

სადაც  $P(f, g, t)$  კორელაციური ფუნქციაა,  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n)$  ფიზიკური სიდიდეებია რომლებიც ახასიათებენ სისტემას..

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ როდესაც სისტემაში ადგილი აქვს მოძრაობას აღრევით,  $\tau_c$  დროის შემდეგ ფიზიკური სიდიდეები თავის საწყის პირობებს ივიწყებენ და ხდებიან სტატისტიკურად დამოუკიდებელნი.  $\tau_c$  სისტემის

აღრვეის დროა. (1.86)-ის თანახმად ეს დრო შედეგნაირად არის დაკავშირებული კოლმოგოროვის ენტროპიასთან:  $h \sim 1/\tau_c$ . ამრიგად კოლმოგოროვის ენტროპიის შებრუნებული სიდიდე განსაზღვრავს სისტემის აღრვეის დროს.  $t \gg \frac{1}{h}$  დროის გასვლის შემდეგ, თუ სისტემა კონსერვატიულია, ფაზური სივრცის საწყისი  $\Omega_0$  არე განითხმება მთელ ენერგეტიკულ ზედაპირზე, ანდა მიიზიდება უცნაური ატრაქტორისკენ, თუ გვაქვს დისიპაციური დინამიური სისტემა.  $t \ll \tau_c \sim \frac{1}{h}$  დროებში სისტემის მოძრაობა შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ საკმაო სიზუსტით.  $t \gg \tau_c \sim \frac{1}{h}$  დროის შემდეგ სისტემის მოძრაობა აღიწერება სტატისტიკური კანონებით.

კიდევ ერთი ფორმალური განსხვავება ერგოდულ მოძრაობასა და აღრვეით მოძრაობას შორის მდგომარეობს სისტემის სპექტრალური თვისებების განსხვავებაში. შემოვიტანოთ  $P(f, f, t)$  კორელატორის სპექტრალური

$$\text{სიმკვრივე: } P(f, f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} P(\omega). \quad (1.88)$$

ერგოდული მოძრაობისათვის სპექტრი დისკრეტულია ე.ი:

$$P(\omega) = \sum_k P_k \delta(\omega - \omega_k) \quad \text{რაც ნიშნავს სისტემის პირობითად პერიოდულ}$$

მოძრაობას  $\omega_k$  სისშირეებით.  $\omega_k$  სისშირეების სიმრავლე შეიძლება იყოს უსასრულო ე.ი. სისშირეთა სპექტრი დისკრეტულია, თუმცა შეიძლება იყოს უსასრულო. ხოლო, თუ სისტემაში გვაქვს მოძრაობა აღრვეით, სისშირეთა სპექტრი უწყვეტია [21, 30]. ქაოსური მოძრაობისათვის დამახასიათებელია უწყვეტი ფურიე სპექტრი.

ვაჩვენოთ ახლა რომ არაწრფივ ჰამილტონურ რხევით სისტემაში მოძრაობის არამდგრადობა დაკავშირებულია ფაზური ტრაექტორიების გაჭიმვასთან  $\theta$  ცვლადით.

ამისათვის განვიხილოთ არაწრფივი კონსერვატიული რხევითი სისტემა, რომელზეც მოქმედებს პერიოდული ბიძგები:

$$H = H_0 + \varepsilon V(I, \theta, t) = H_0 + \varepsilon V(I, \theta) T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT); \quad (1.89)$$

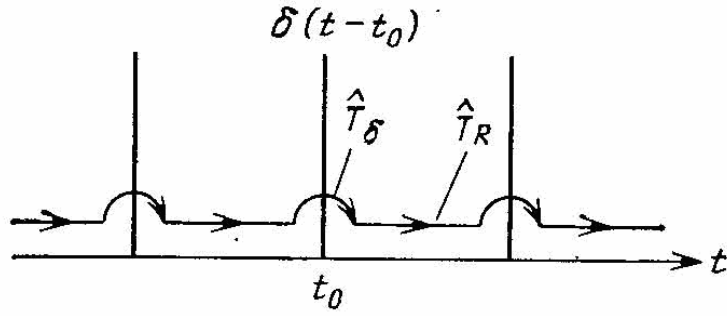
მაშინ მოძრაობის განტოლებებისათვის  $\left( \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} \right)$  მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dot{I} = -\frac{\partial V(I, \theta, t)}{\partial \theta} = -\varepsilon \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V(I, \theta, t)}{\partial I} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial I} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \end{cases} \quad (1.90)$$

დაუშვათ ბიძგი ხდება რაღაც  $t = t_0$  დროის მომენტში. განვსაზღვროთ  $\hat{T}$  ასახვა შემდეგნაირად (ნახ.1.17):

$$(\bar{I}, \bar{\theta}) = \hat{T}(I, \theta), \quad (1.91)$$

$$\bar{I} = I(t_0 + T - 0), \quad \bar{\theta} = \theta(t_0 + T - 0), \quad I = I(t_0 - 0), \quad \theta = \theta(t_0 - 0)$$



ნახ.1.17 უნივერსალური ასახვის მიღება

$\hat{T}$  ასახვა მიიღება, როგორც თანმიმდევრული  $\hat{T}_\delta$  ბიძგის ოპერატორისა და თავისუფალი  $\hat{T}_R$  მოძრაობის (ტორზე ბრუნვის) ოპერატორის ნამრავლი:

$$\hat{T} = \hat{T}_R \cdot \hat{T}_\delta.$$

$\hat{T}_\delta$  ოპერატორს გადაჰყავს სისტემა  $(I(t_0-0), \theta(t_0-0))$  მდგომარეობიდან  $(I(t_0+0), \theta(t_0+0))$  მდგომარეობაში:  $(I(t_0+0), \theta(t_0+0)) = \hat{T}_\delta(I(t_0-0), \theta(t_0-0))$ .

იმისათვის რომ მივიღოთ  $\hat{T}_\delta$  გავაინტეგროთ სისტემა  $(t_0-0, t_0+0)$  ბიძგის მახლობლობაში. (1.90) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$I(t_0+0) - I(t_0-0) = \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{I} dt = -\varepsilon T \frac{\partial V(I; \theta)}{\partial \theta}; \quad (1.92)$$

$$\theta(t_0+0) - \theta(t_0-0) = \int_{t_0-0}^{t_0+0} \dot{\theta} dt = \varepsilon T \frac{\partial V(I; \theta)}{\partial I}.$$

$\hat{T}_R$  ბრუნვის ოპერატორს გადაჰყავს სისტემა  $(I(t_0+0), \theta(t_0+0))$  მდგომარეობიდან,  $(I(t_0+T-0), \theta(t_0+T-0))$  მდგომარეობაში:

$$(I(t_0+T-0), \theta(t_0+T-0)) = \hat{T}_R(I(t_0+0); \theta(t_0+0)).$$

(1.90) მოძრაობის განტოლებიდან:

$$\begin{cases} I(t_0+T-0) = I(t_0+0) = \bar{I} \\ \theta(t_0+T-0) = \theta(t_0+0) + \omega(\bar{I})T \end{cases} \quad (1.93)$$

(1.91) და (1.92) განტოლებების გაერთიანება გვაძლევს:

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta + \omega(\bar{I})T + \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial I}; \\ \bar{I} = I - \varepsilon T \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta} \end{cases} \quad (1.94)$$

(1.94) ასახვა ერთმანეთს აკავშირებს  $(I_n, \theta_n)$  ცვლადებს  $n$  ბიძგამდე და  $n$  ბიძგის შემდეგ  $(I_{n+1}, \theta_{n+1}) = \hat{T}(I_n, \theta_n)$ :



$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_{n+1})T + \varepsilon T \frac{\partial V(I_n, \theta_n)}{\partial I_n}; \\ I_{n+1} = I_n - \varepsilon T \frac{\partial V(I_n, \theta_n)}{\partial \theta_n}. \end{cases} \quad (1.95)$$

მივიღეთ უნივერსალური ასახვა. (1.95) ასახვა ზუსტია. მისი შემდგომი გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ  $V$  არის მხოლოდ ერთი ცვლადის  $\theta$ -ს ფუნქცია. მაგალითად განვიხილოთ როტატორი ჩახშობის გარეშე, რომელზეც მოქმედებს პერიოდული ბიძგები. მისი ჰამილტონიანი ქმედება კუთხის ცვლადებში ჩაიწერება ასე:

$$H = \frac{I^2}{2} + \varepsilon V(\theta) \cdot T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad (1.96)$$

მაშინ  $\omega(I) = I$  და (1.95) ასახვა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_{n+1}) \cdot T \\ I_{n+1} = I_n - \varepsilon T \frac{\partial V(\theta_n)}{\partial \theta_n} \end{cases} \quad (1.97)$$

შემდგომი გამარტივება მდგომარეობს  $V$  პოტენციალის სახის არჩევაში თუ ავირჩევთ რომ  $V = V_0 \cos \theta$ , მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_{n+1}) \cdot T \\ I_{n+1} = I_n + \varepsilon V_0 T \sin \theta_n \end{cases} \quad (1.98)$$

თუ ავიღებთ  $T = 1$  და შემოვიღებთ აღნიშვნას  $K = -\varepsilon V_0$  მაშინ მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ ჩირიკოვის ანუ სტანდარტულ ასახვას [27-28]. ამ ასახვას მივიღებთ თუ განვიხილავთ როტატორის ამოცანას ჩახშობის გარეშე და (1.11) ფორმულებში გადავალთ ზღვარზე ( $\Gamma \rightarrow 0$ ) და ავიღებთ:  $Kf(x_n) = -K \sin x_n$

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_{n+1}) \\ I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n \end{cases}$$

მოცემული ასახვა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \omega(I_n) - K \sin \theta_n; \\ I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n. \end{cases} \quad (1.99)$$

მოცემული სისტემისათვის არაწრფივობის პარამეტრი:

$$\gamma_m = \left( \frac{d\omega(I_m)}{dI} \right) \cdot \frac{I_m}{\omega(I_m)} = 1, \quad \text{ხოლო შეშფოთების როლს თამაშობს } K = -\varepsilon V_0$$

სიდიდე ამიტომ  $K'$  კოეფიციენტისათვის რომელიც ახასიათებს რეზონანსების

გადაფარვას შეგვიძლია დავწეროთ:  $K' \sim \sqrt{|K|}$ . როდესაც  $K \gg 1$ , მაშინ  $K' \gg 1$  ადგილი აქვს რეზონანსების გადაფარვას, რომელსაც მივყავართ ქაოსურ მოძრაობამდე.

ვანხვით ახლა რომ რეზონანსების გადაფარვა პირდაპირ არის დაკავშირებული ფაზური ტრაექტორიების გაჭიმვასთან და ტრაექტორიების აღრევასთან ფაზურ სივრცეში. ამისათვის განვიხილოთ სიდიდე:

$$\left| \frac{\delta\theta_{n+1}}{\delta\theta_n} - 1 \right| = |K \cdot \cos \theta_n| \quad (1.100)$$

რომელიც ახასიათებს ფაზების გაჭიმვას.

როცა  $K \ll 1$  მაშინ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მოძრაობის მდგრადობაზე კამ თეორიის შესაბამისად, რადგანაც საწყის მომენტში ახლოს მდებარე ფაზური ტრაექტორიები რჩებიან ერთმანეთთან ახლოს ევოლუციის პროცესში. , როცა  $K \gg 1$ , მაშინ ხდება ლოკალური არამდგრადობები, რომელსაც მივყავართ ტრაექტორების აღრევასთან ფაზურ სივრცეში. მაგრამ რამდენადაც დიდი არ უნდა იყოს  $K$ -ს მნიშვნელობები, ყოველთვის არსებობს კუთხების ისეთი არე:  $\Delta\theta \leq 1/K$ , როდესაც  $|K \cdot \cos \theta| < 1$  და გაჭიმვა არა გვაქვს. ეს არეები განლაგდებიან  $\theta = \pi/2$  მახლობლად და მას შეესაბამება მდგრადი ტრაექტორიები.

ვანხვით ახლა, რომ არამდგრადობებს, რომლებიც წარმოქმნება ფაზების გაჭიმვის შედეგად მივყავართ, კორელაციების გაწყვეტამდე და შესაბამისად ტრაექტორიების აღრევამდე ფაზურ სივრცეში. ამისათვის განვიხილოთ კორელაციის ფუნქცია ფაზებისათვის [29-30]:

$$P(r t_n | s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{i(r\theta_n - s\theta_0)} \quad (1.101)$$

სადაც  $r$  და  $s$  მთელი დადებითი რიცხვებია, ხოლო  $t_n = nT = n$  ( $T = 1$ ).

(1.99)-დან ჩავსვათ  $\theta_n$  როგორც  $\theta_{n-1}$ -ის ფუნქცია, მაშინ მივიღებთ:

$$P(r t_n | s, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{i(r\theta_{n-1} + r\omega - 2K \sin \theta_{n-1} - s\theta_0)} \quad (1.102)$$

გავითვალისწინოთ ცნობილი გაშლა [41]:

$$e^{-iz \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m J_m(z) e^{im\varphi} \quad (1.103)$$

და ცნობილი თანაფარდობა:  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$  სადაც  $J_n(x)$  ბესელის ფუნქციაა.

მაშინ კორელაციის ფუნქციისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
P(r, t_n | s, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{i(r\theta_{n-1} + r\omega - 2K \sin \theta_{n-1} - s\theta_0)} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{i(r\theta_{n-1} + r\omega - s\theta_0)} e^{-irk \sin \theta_{n-1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0 e^{i(r\theta_{n-1} + r\omega - s\theta_0)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m J(rk) e^{im\theta_{n-1}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{ir\omega} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} J_{m_1}(rk) \int_0^{2\pi} e^{i((r-m_1)\theta_{n-2} + (r-m_1)\omega - (r-m_1)K \sin \theta_{n-2})} = \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{2ior} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} J_{m_1}(rK) J_{m_2}((r-m_1)K) e^{-im_1\omega} e^{i((r-m_1-m_2)\theta_{n-1} - s\theta_0)} = \\
&= e^{inr\omega} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} J_{m_1}(rK) J((r-m_1)K) \dots J_{m_n}((r-m_1 \dots - m_{n-1})K) P(r-m_1 \dots - m_n, 0 | s, 0)
\end{aligned} \tag{1.104}$$

ადვილი დასაბუთებია, რომ  $P(m, 0 | n, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta_0} d\theta_0 = \delta_{mn}$ .

გარდა ამისა თუ გამოვიყენებთ ბესელის ფუნქციების ასიმპტოტიკას [4]:

$$J_m(z) \sim \frac{1}{(z)^{1/2}}, \quad z \gg 1 \quad \text{მაშინ მივიღებთ:}$$

$$P(r, t_n | s, 0) \sim \frac{1}{K^{n/2}} e^{inr\omega} = \frac{1}{K^{n/2}} e^{inr\omega T} = e^{-t_n/\tau_c} e^{inr\omega T} \tag{1.105}$$

სადაც  $\tau_c = \frac{2T}{\ln K}$  კორელაციის გაწყვეტის დროა. ამრიგად ფაზებისთვის  $\tau_c$ -

კორელაციის გაწყვეტის დროის არსებობა ნიშნავს ფაზური ტრაექტორიების აღრევას. ე.ი. ჩვენ ვახვეწებთ, რომ რეზონანსების გადაფარვას მიყვავართ ფაზური ტრაექტორიების გაჭიმვამდე და მოძრაობის არამდგრადობამდე, რასაც თავის მხრივ მიყვავართ ფაზური ტრაექტორიის აღრევამდე. შეგვიძლია წავიღოთ უფრო შორს და აღრევითი მოძრაობისათვის დავწეროთ კინეტიკური განტოლება.

კინეტიკური განტოლების მისაღებად გამოვიღოთ უწყვეტობის განტოლებიდან განაწილების ფუნქციისათვის:

$$\frac{\partial f(t, I, \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} [\dot{\varphi} f(t, I, \varphi)] + \frac{\partial}{\partial I} [\dot{I} f(t, I, \varphi)] = 0, \tag{1.106}$$

საიდანაც (1.90) განტოლებათა სისტემის გათვალისწინებით ვღებულობთ ლიუვილის განტოლებას:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial f}{\partial t} &= (\hat{L}_0 + \varepsilon \hat{L}_1) f \\
\hat{L}_0 &= i\omega(I) \frac{\partial}{\partial \theta},
\end{aligned} \tag{1.107}$$

$$\hat{L}_1 = -i \left( \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I} \right),$$

ჩვენ ვთვალთ რომ  $f(t, s_z, \theta)$   $\theta$ -ს პერიოდული პუნქციაა. ამიტომ ის წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$f(t, I, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \exp[in \left( \theta - \int_0^t \omega(t') dt' \right)] f_n(I, t) \quad (1.108)$$

ჩვენ ვათვალიყვით (1.108) (1.107)-ში, საიდანაც მივიღებთ:

$$i \frac{\partial f_n(I, t)}{\partial t} = \varepsilon \sum_m \langle n | \hat{L}_1 | m \rangle \exp[i(m-n) \int_0^t \omega(t') dt'] f_m(I, t) \quad (1.109)$$

$$\text{სადაც } \langle n | \hat{L}_1 | m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \hat{L}_1 e^{im\theta} \quad (1.110)$$

(1.109)-ის ფორმალური ამოხსნა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$f_n(I, t) = f_n(I, 0) - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \exp[i(m-n) \int_0^{t_1} \omega(t') dt'] \langle n | \hat{L}_1 | m \rangle f_m(I, t) \quad (1.111)$$

(1.111) განტოლების იტერაცია მეორე რიგამდე მოგვცემს:

$$\begin{aligned} f_n(I, t) = & f_n(I, 0) - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \exp\left[i(n-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt'\right] \langle n | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle f_m(I, 0) + \\ & + (-i\varepsilon)^2 \sum_m \sum_k \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp\left[i(n-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt'\right] \cdot \langle n | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle \cdot \\ & \cdot \exp\left[i(m-k) \int_0^{t_2} \omega(t') dt'\right] \langle m | \hat{L}_1(t_2) | k \rangle f_k(I, 0) \end{aligned} \quad (1.112)$$

აქედან ნულოვანი კომპონენტისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} f_0(I, t) = & f_0(I, 0) - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \exp\left[i(-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt'\right] \langle 0 | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle f_m(I, 0) + \\ & + (-i\varepsilon)^2 \sum_m \sum_k \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp\left[i(-m) \int_0^{t_1} \omega(t') dt'\right] \cdot \langle 0 | \hat{L}_1(t_1) | m \rangle \cdot \\ & \cdot \exp\left[i(m-k) \int_0^{t_2} \omega(t') dt'\right] \langle m | \hat{L}_1(t_2) | k \rangle f_k(I, 0) \end{aligned} \quad (1.113)$$

ჩვენ ვთვალთ რომ  $\hat{L}_1(t)$  წარმოადგენს  $t$ -ს პერიოდულ ფუნქციას  $t = 2\pi / \Omega$  პერიოდით. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\hat{L}_1 = \sum_p L_{1p} \exp(ip\Omega t) \quad L_{1,-p} = L_{1,p}^* \quad (1.114)$$

ამ გამოსახულების ჩასმა (1.113) გამოსახულებაში გვაძლევს:

$$\begin{aligned} f_0(I, t) = & f_0(I, 0) - \\ & - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \exp[im \int_0^{t_1} \omega(t') dt'] \langle 0 | \hat{L}_1 | m \rangle f_m(I, 0) + \\ & + (-i\varepsilon)^2 \sum_m \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \exp[im \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt'] \langle 0 | \hat{L}_{1p}(t_1) | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p}(t_2) | 0 \rangle e^{ip\Omega(t_1-t_2)} f_0(I, 0) + \\ & + \varepsilon^2 \Sigma' \end{aligned} \quad (1.115)$$

სადაც  $\varepsilon^2 \Sigma'$  აღნიშნულია ყველა დანარჩენი სწრაფად ოსცილირებადი არარეზონანსული წევრები, ამიტომ ისინი შეგვიძლია უგულებელვყოთ როცა  $t \rightarrow \infty$ .

შემოვიღოთ საწყისი ფაზებით გასაშუალოება  $\langle\langle \dots \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_0$  და აღნიშნებო:

$$\Psi(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t') dt', \quad F(I, t) = \langle\langle f_0(I, t) \rangle\rangle. \quad \text{მაშინ (1.115)-დან მივიღებთ:}$$

$$F(I, t) = f_0(I, 0) - i\varepsilon \sum_m \int_0^t dt_1 \langle\langle \exp(im\Psi(t_1, 0)) \rangle\rangle \langle 0 | \hat{L}_1 | m \rangle f_m(I, 0) - \quad (1.116)$$

$$+ (-i\varepsilon)^2 \sum_m \sum_p \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle\langle \exp[-im\Psi(t_1, t_2)] \rangle\rangle \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle e^{ip\Omega(t_1-t_2)} f_0(I, 0).$$

მოძრაობის განტოლებებიდან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\dot{\theta} \approx -\omega(I), \quad \text{ამიტომ } \Psi(t_1, t_2) = \int_{t_2}^{t_1} \omega(t') dt' = \theta(t_1) - \theta(t_2) \quad (1.117)$$

რადგანაც ჩვენ გვაქვს მოძრაობა აღრევით ამიტომ (1.105) გამოსახულების ანალოგიურად შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\langle\langle \exp im\Psi(t_1, 0) \rangle\rangle = \langle\langle \exp(im(\theta(t_1) - \theta(0))) \rangle\rangle \approx \exp(-t_1 / \tau_c) \exp(-im\omega t_1). \quad (1.118)$$

სადაც  $\tau_c = 2T / \ln K$ . ანალოგიურად:

$$\langle\langle \exp im\Psi(t_2, t_1) \rangle\rangle = \langle\langle \exp(im(\theta(t_1) - \theta(t_2))) \rangle\rangle \approx \approx \exp(-(t_1 - t_2) / \tau_c) \exp(-im\omega(t_1 - t_2)). \quad (1.119)$$

თუ ჩავსვავთ (1.118)-ს და (1.119)-ს (1.116)-ში, შემოვიტანთ ახალ ცვლადს  $\tau = t_1 - t_2$  და გავაწარმოებთ  $t$ -თი მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -i\varepsilon \exp(-t / \tau_c) \sum_m e^{-im\omega t} \langle 0 | \hat{L}_1 | m \rangle f_m(I, 0) - \quad (1.120)$$

$$- (-i\varepsilon)^2 \sum_m \sum_p \int_0^t d\tau e^{-\tau/\tau_c - i(m\omega - p\Omega)\tau} \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle f_0(I, 0).$$

(1.120)-დან ჩანს რომ როცა  $t \gg \tau_c$ , პირველი წევრი ექპონენციალურად ეცემა, ეს იმას იმნავს რომ სისტემა ივიწყებს თავისი საწყისი პირობების შესახებ ინფორმაციას, რომელსაც შეიცავდნენ  $f_m(I, 0)$  წევრები. ამიტომ თუ გადავალთ ზღვარზე  $t \rightarrow \infty$ , და  $f_0(s_z, 0)$ -ს შევცვლით  $F(s_z, t)$ -თი მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (-i\varepsilon)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_m \sum_p \int_0^t d\tau e^{-\tau/\tau_c - i(m\omega - p\Omega)\tau} \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle F. \quad (1.121)$$

თუ ჩავატარებთ ინტეგრირებას, (რეზონანსობის პირობა  $m\omega - p\Omega \approx 0$  ნიშნავს რომ (1.121) გამოსახულებაში ორმაგი ჯამიდან ხდება იმ წევრების ამორჩევა რომლებშიც  $m$ -ის და  $p$ -ს ნიშნები ერთნაირია) და გავითვალისწინებთ აგრეთვე რომ  $\langle 0 | \hat{L}_{1-p} | -m \rangle = \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle$ ,  $\langle -m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle$  მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2\varepsilon^2 \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{(1/\tau_c) \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle F}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2}. \quad (1.122)$$

დავთვალოთ ახლა  $\langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle$  სიდიდე:

გავითვალისწინოთ რომ  $\hat{L}_1 = \sum_p L_{1p} \exp(ip\Omega t)$ ,  $L_{1p} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \hat{L}_1(t) e^{-ip\Omega t} dt$ ,

$$\langle n | \hat{L}_1 | m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \hat{L}_1 e^{im\theta}, \quad \hat{L}_1 = -i \left( \frac{\partial V}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial I} \right), \quad (1.123)$$

$$V(I, \varphi, t) = V(I, \varphi) T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), \quad V(I, \varphi) = \sum_n V_n(s_z) e^{in\varphi}, \quad V_n = V_{-n}^*.$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle 0 | L_{1p} | m \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \langle 0 | \hat{L}_1(t) | m \rangle e^{-ip\Omega t} = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_0^{2\pi} d\theta L_1(t) e^{im\theta} e^{-ip\Omega t} = \\ &= -i \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I} \right) e^{im\theta} e^{-ip\Omega t} \delta(t - kT) = \\ &= -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_n \left( \frac{\partial V_n(I)}{\partial I} e^{in\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - V_n(I) (in) e^{in\theta} \frac{\partial}{\partial I} \right) e^{im\theta} = \\ &= m \left( \frac{\partial V_{-m}(I)}{\partial I} + V_{-m} \frac{\partial}{\partial I} \right) \end{aligned} \quad (1.124)$$

ანალოგიურად:

$$\begin{aligned} \langle m | L_{1-p} | 0 \rangle &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \langle m | \hat{L}_1(t) | 0 \rangle e^{ip\Omega t} = \frac{\Omega}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_0^{2\pi} d\theta e^{-im\theta} \hat{L}_1(t) e^{ip\Omega t} = \\ &= -i \frac{\Omega}{2\pi} \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_0^{2\pi} d\theta e^{-im\theta} \left( \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial V(I, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial I} \right) e^{ip\Omega t} \delta(t - kT) = \\ &= -i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sum_n e^{-im\theta} \left( \frac{\partial V_n(I)}{\partial I} e^{in\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - V_n(I) (in) e^{in\theta} \frac{\partial}{\partial I} \right) = -m V_m(I) \frac{\partial}{\partial I} = \\ &= -m V_m(I) \frac{\partial}{\partial I}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

(1.124) და (1.125) გამოსახელებების გაერთიანებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{L}_{1p} | m \rangle \langle m | \hat{L}_{1-p} | 0 \rangle &= -m^2 \left( \frac{\partial V_{-m}(I)}{\partial I} + V_{-m} \frac{\partial}{\partial I} \right) \cdot \left( V_m(I) \frac{\partial}{\partial I} \right) = \\ &= -m^2 \left( \frac{\partial}{\partial I} |V_m|^2 \frac{\partial}{\partial I} \right) \end{aligned} \quad (1.126)$$

(1.126)-ის (1.122)-ში ჩასმა მოგვცემს:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial I} \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{(1/\tau_c) m^2 |V_m|^2}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} \frac{\partial F}{\partial I}. \quad (1.127)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგი სახის კინეტიკურ განტოლებას:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D(I) \frac{\partial F}{\partial I}. \quad (1.128)$$

სადაც:

$$D(I) = 2\varepsilon^2 \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{(1/\tau_c)m^2 |V_m|^2}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} \quad (1.129)$$

კოეფიციენტს დიფუზიის კოეფიციენტი ეწოდება.

როცა  $\frac{1}{\tau_c \Omega} \rightarrow 0$ , მაშინ  $\frac{(1/\tau_c)\pi}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} \rightarrow \delta(m\omega - p\Omega)$ ,

მაშინ ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 \pi \sum_{m>0} \sum_{p>0} \frac{(1/\tau_c)m^2 |V_m|^2}{(1/\tau_c)^2 + (m\omega - p\Omega)^2} = \\ = \varepsilon^2 \pi \sum_m \int dp \Omega \cdot \delta(m\omega - p\Omega) \frac{m^2 |V_m|^2}{\Omega} = \varepsilon^2 \pi \sum_{m>0} \frac{m^2 |V_m|^2}{\Omega} = \frac{\varepsilon^2 \pi}{2} \sum_m \frac{m^2 |V_m|^2}{\Omega} \end{aligned} \quad (1.130)$$

ამრიგად დიფუზიის კოეფიციენტი იღებს სახეს:

$$D(I) = \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \sum_m \frac{m^2 |V_m|^2}{\Omega} \quad (1.131)$$

მაგალითად როდესაც პოტენციალი  $V = V_0 \cos \theta = \frac{V_0}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ , მაშინ

$$V_{-1} = V_1 = \frac{V_0}{2} \text{ და დიფუზიის კოეფიციენტი მიიღებს სახეს: } D(I) = \frac{\pi \varepsilon^2 V_0^2}{4\Omega}.$$

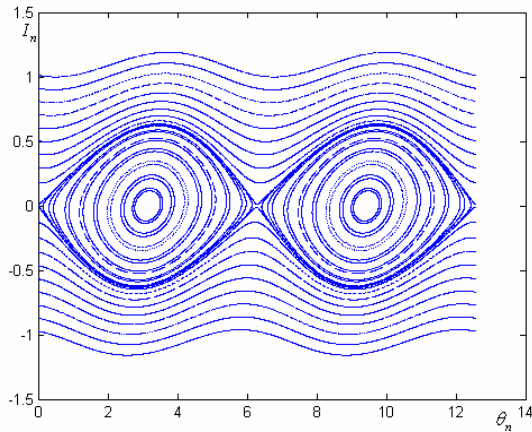
(1.128) კინეტიკური განტოლების ამოხსნა ზოგადად შეუძლებელია. მაგრამ კერძო შემთხვევებში შესაძლებელია ვიპოვოთ სტაციონარული განაწილების ფუნქცია ანდა გამოვიკვლიოთ განაწილების ფუნქციის მომენტები.

ბოლოს მოვიყვანოთ რიცხვითი ექსპერიმენტები სტანდარტული ასახვისათვის:

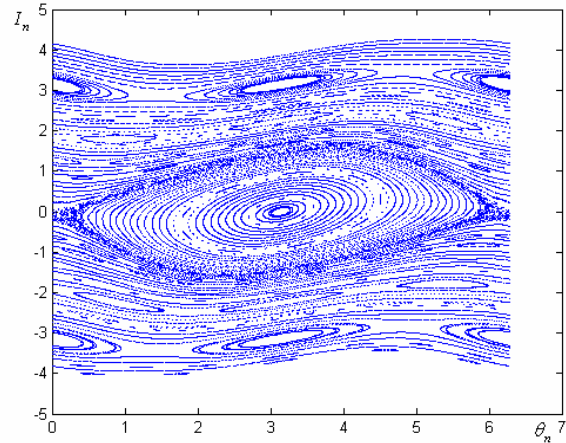
$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \\ I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n \end{cases} \quad (1.132)$$

სისტემის ფაზური პორტრეტი სხვადასხვა  $K$  -ს დროს მოყვანილია ნახ.1.18-ზე.

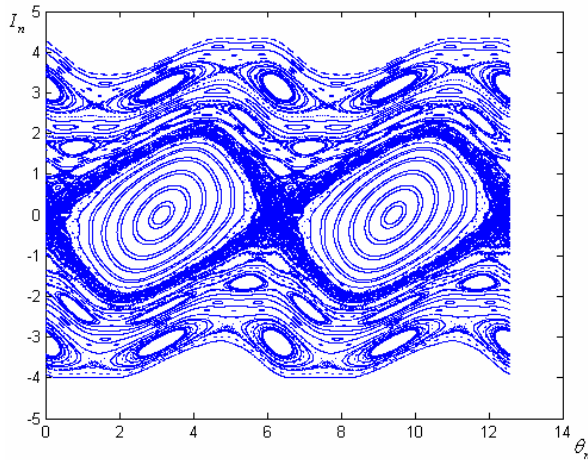
როცა  $K = 0.1$ , მოძრაობას აქვს რეგულარული ხასიათი.  $K$ -ს გაზრდის სისტემაში ხდება ჯერადი რეზონანსების გაჩენა. როდესაც  $K = 0.9$  ხდება მთავარი სეპარატრისის დაშლა და მის ადგილას სტოხასტური ფენის გაჩენა.  $K$ -ს კიდევ უფრო გაზრდით ხდება რეზონანსების გადაფარვა და წარმოიქმნება სტოხასტური ზღვა.



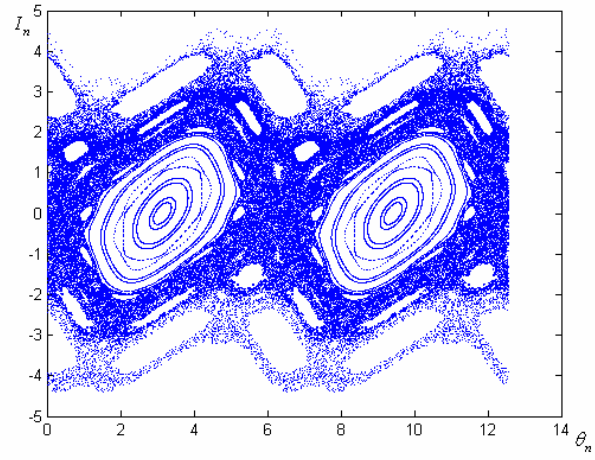
ა)



ბ)



გ)



დ)

ნახ. 1.18 ა) სტანდარტული ასახვის ფაზური პორტრეტი როცა  $K = 0.1$ . როგორც ამ სურათიდან ჩანს სისტემაში შესაძლებელია ორი ტიპის მოძრაობა რხევითი და ბრუნვითი, რომლებიც ერთმანეთისაგან არის გაყოფილი სეპარატრისით.  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  წერტილები წარმოადგენენ ჰიპერბოლური ტიპის უძრავ წერტილებს, ხოლო  $\theta = \pi, 3\pi \dots$  წერტილები წარმოადგენენ ელიფსური ტიპის უძრავ წერტილებს. ბ) სტანდარტულ ასახვის ფაზური პორტრეტი როცა  $K = 0.6$ . ამ დროს სისტემაში ხდება რეზონანსები გაჩენა რაც გამოიხატება ნახაზზე ახალი ჰიპერბოლური და ელიფსური ტიპის წერტილების გაჩენით. გ) სტანდარტულ ასახვის ფაზური პორტრეტი როცა  $K = 0.9$ . ამ დროს მთავარი საპარატრისა დაშლილია და მის ადგილას წარმოიქმნა სტოხასტური ფენა. მთავარი სტოხასტური ფენის შიგნით გვაქვს ინვარიანტული მრუდები რომლებიც განლაგდებიან ელიფსური ტიპის უძრავი წერტილების გარშემო, ხოლო მის გარეთ გვაქვს სეპარატრისული უჯრედების სიმრავლე უფრო ვიწრო სტოხასტური ფენებით. სხვადასხვა სტოხასტური ფენები ერთმანეთისაგან არიან განცალკევებული ინვარიანტული მრუდებით კამ-თეორიის თანახმად. დ) სტანდარტულ ასახვის ფაზური პორტრეტი როცა  $K = 1.2$ . ამ დროს ხდება რეზონანსების გადაფარვა და წარმოიქმნება ეგრეთ წოდებული სტოხასტური ზღვა. ნახაზზე კარგად ჩანს მდგრადობის კუნძულები სტოხასტურ ზღვაში.



## 2. თავი ქაოსი არაწრფივ ბლოხის სისტემაში [42]

ბოლო წლებში მიმდინარეობს არაწრფივი ეფექტების კვლევა ბირთვული მაგნიტური მომენტების სისტემაში, განპირობებული რეზონატორის (რხევითი კონტურის) ზემოქმედებით ბირთვული დამაგნიტების დინამიკაზე [43-46]. დავუშვათ ნიმუში მოთავსებული გვაქვს რხევით კონტურში. ბირთვული დამაგნიტების პრეცესიის გამო რხევით კონტურს განჭოლავს ცვლადი მაგნიტური ნაკადი. მაგნიტური ინდუქციის კანონის თანახმად ეს იწვევს ინდუქციური მაგნიტური ველის გაჩენას, რომელიც თავის მხრივ, მოქმედებს ბირთვული დამაგნიტების დინამიკაზე. რხევით კონტურებში ასეთი უკუკავშირის შესახებ დეტალურად არის აღწერილი მონიგრაფიებში [47-48]. ასეთი უკუკავშირის გამო, განტოლებები რომლებიც აღწერენ ბირთვული დამაგნიტების დინამიკას (ბლოხის განტოლებები) არის არაწრფივი. არაწრფივობა თავის მხრივ შეიძლება გახდეს დინამიური ქაოსის გაჩენის მიზეზი [3,12, 29-30] ბირთვულ სპინურ სისტემაში. ადრე შესწავლილი იყო ბირთვული სპინური ექოს გაძლიერება მაგნეტიკებში [49], ბირთვული მაგნიტური მომენტების რადიოსიხშირული ზეგამოსხივება გამოწვეული რეზონატორული ეფექტებით [50-52].

ჩვენს მიერ შესწავლილი იყო ბირთვული დამაგნიტების დინამიკა, როდესაც სისტემაზე ერთდროულად მოქმედებს  $Z$  ღერძის გასწვრივ მიმართული მუდმივი მაგნიტური ველი,  $X$  ღერძის გასწვრივ მიმართული რადიოსიხშირული (რს) ველი  $\omega$  სიხშირით და  $H_1$  ამპლიტუდით და თვითონ  $\vec{M}$  დამაგნიტების მიერ

შექმნილი ველი  $H_M = \frac{\eta M^+}{\gamma_n} e^{i\varphi}$  [53]. აქ  $M^+ = M_x + iM_y$ ,  $\gamma_n$  გირომაგნიტური

თანაფარდობა ბირთვებისათვის,  $\varphi$  დამაგნიტების მიერ აღძრული ველის ფაზაა,  $\eta$ - რხევითი კონტურის პარამეტრებით განსაზღვრული კოეფიციენტი:

$\eta = 2\pi\omega\eta_0\gamma_n \frac{L}{R}$ , სადაც  $L$ -კოჭის ინდუქტივობაა,  $R$ -წინაღობა,  $\eta_0 = \frac{A_s}{A_c}$  ნიმუშის

მიერ კოჭის შევსების კოეფიციენტი,  $A_s$  ნიმუშის კვეთის ფართობია,  $A_c$  კოჭის კვეთის ფართობი.

ამ ყველაფრის გათვალისწინებით, ბლოხის განტოლებებს [54], რომლებიც აღწერენ ბირთვული დამაგნიტების დინამიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dot{M}_x = \delta M_y + \eta M_z (M_x \sin \varphi - M_y \cos \varphi) - \frac{M_x}{T_2} \\ \dot{M}_y = -\delta M_x - \omega_1 M_z + \eta M_z (M_x \cos \varphi + M_y \sin \varphi) - \frac{M_y}{T_2} \\ \dot{M}_z = -\omega_1 m_y - \eta \sin \varphi (M_x^2 + M_y^2) - \frac{M_z - M_0}{T_1} \end{cases} \quad (2.1)$$

სადაც  $\delta = \omega - \omega_0$  არის ბირთვული მაგნიტურ რეზონანსის (ბმრ) სიხშირესა და ცვლადი რადიოსიხშირული ველის სიხშირეს  $\omega$  შორის სხვაობა,  $T_1$  და  $T_2$  ბირთვული დამაგნიტების გასწვრივი და განივი მდგენელების რელაქსაციის დროებია,  $\omega_1 = H_1 \gamma_n$  - რადიოსიხშირული ველის ამპლიტუდაა სიხშირულ ერთეულებში.

გადავიდეთ უგანზომილებო ცვლადებზე:

$$t \rightarrow \omega_1 t, \quad \frac{\eta M_0}{\omega_1} = \gamma, \quad \delta \rightarrow \frac{\delta}{\omega_1}, \quad T_{1,2} \rightarrow \omega_1 T_{1,2} \rightarrow \Gamma_{1,2}$$

$$M_x \rightarrow \frac{M_x}{M_0} = x, M_y \rightarrow \frac{M_y}{M_0} = y, M_z \rightarrow \frac{M_z}{M_0} = z, M_0 = |\vec{M}(0)|$$

ახალ ცვლადებში (2.1) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta y + \gamma z(\alpha x - y\beta) - \frac{x}{\Gamma} \\ \dot{y} = -\delta x - \frac{y}{\Gamma} - z + \gamma z(\beta x + \alpha y) \\ \dot{z} = y - \frac{z}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma} - \gamma\alpha(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (2.2)$$

სადაც შემოტანილია აღნიშვნა  $\alpha = \sin \varphi$ ,  $\beta = \cos \varphi$ . გარდა ამისა გააკეთებულია დაშვება რომ განივი და გასწვრივი რელაქსაციის დროები ერთი და იგივე რიგის სიდიდეებია  $\Gamma_1 \cong \Gamma_2 \cong \Gamma$ . ასეთი დაშვება სამართლიანია სითხეებისათვის.

(2.2) განტოლებათა სისტემის ანალიზისათვის ჩვენ განვიხილეთ სუსტი და ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევა და ვაჩვენეთ რომ არსებობს კოეფიციენტი  $\gamma_c$  რომელიც სისტემის პარამეტრებზეა დამოკიდებული. როცა  $\gamma < \gamma_c$  გვაქვს სუსტი არაწრფივობა და (2.2) სისტემა შეგვიძლია ამოვხსნათ ანალიზურად შემფოტების თეორიის გამოყენებით. მიღებული ამონახსნები კარგ თანხვედრაში არიან (2.2) სისტემის რიცხვით ამონახსნებთან. მეორე ზღვრულ შემთხვევაში როცა  $\gamma > \gamma_c$  სისტემაში შეიძლება წარმოიქმნას დინამური ქაოსი და გაჩნდეს უცნაური ატრაქტორი.

განვიხილოთ ჯერ სუსტი არაწრფივობის შემთხვევა. იმისათვის რომ გამოვიყენოთ შემფოტების თეორია (2.2) სისტემისათვის ეს სისტემა უნდა დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე [55].

თუ გამოვიყენებთ სტანდარტულ მეთოდებს [56], შეიძლება იმის ჩვენება, რომ გარდაქმნას, რომელსაც (2.2) სისტემა დაჰყავს კანონიკურ სახეზე აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\delta x + 2z \\ \dot{y}_1 = -2\lambda y \\ \dot{z}_1 = -\frac{1}{\delta}x + z \end{cases} \quad (2.3)$$

სადაც  $\lambda = \sqrt{1 + \delta^2}$

(2.2) განტოლებები (2.3) ახალ ცვლადებში იღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{\Gamma}x_1 - \lambda y_1 + \frac{\beta\gamma\delta}{2\lambda^3}x_1y_1 + \frac{\beta\gamma\delta^3}{\lambda^3}y_1z_1 - \frac{\alpha\gamma}{2\lambda^2}y_1^2 + \frac{\alpha\gamma\delta^2}{\lambda^2}x_1z_1 - \frac{2\alpha\gamma\delta^2}{\lambda^2}z_1^2 \\ \dot{y}_1 = \lambda x_1 - \frac{y_1}{\Gamma} - \frac{\beta\gamma\delta}{2\lambda^3}x_1^2 + \frac{\beta\gamma\delta}{\lambda^3}x_1z_1 - \frac{\beta\gamma\delta^3}{\lambda^3}x_1z_1 + \frac{2\beta\gamma\delta^3}{\lambda^3}z_1^2 + \frac{\alpha\gamma}{2\lambda^2}x_1y_1 + \frac{\alpha\gamma\delta^2}{\lambda^2}y_1z_1 \\ \dot{z}_1 = -\frac{z_1}{\Gamma} - \frac{\beta\gamma}{4\delta\lambda^3}x_1y_1 - \frac{\beta\gamma\delta}{2\lambda^3}y_1z_1 - \frac{\alpha\gamma}{4\lambda^2}x_1^2 - \frac{\gamma\alpha}{4\lambda^2}y_1^2 + \frac{\gamma\alpha}{2\lambda^2}x_1z_1 + \frac{1}{\Gamma} \end{cases} \quad (2.4)$$

აქ  $\lambda = \sqrt{1 + \delta^2}$

თუ უგულებელვყოფთ რელაქსაციურ პროცესებს ( ე.ი. განვიხილავთ (2.4) განტოლებათა სისტემის ამოხსნებს დროის შუალედებში, რომლებიც ნაკლებია რელაქსაციის დროებზე  $t < T_{1,2}$ ), მაშინ შეიძლება მივიღოთ პერიოდული ამოხსნები.

შემოვიღოთ ამისათვის ახალი დროითი მასშტაბი:

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \dots) \quad (2.5)$$

სადაც  $h_k$  კოეფიციენტები განისაზღვრებიან (2.4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნის პერიოდულობიდან [55]:

$$h_{k-1} = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi} \{x_1^{(k)}(\tau) \sin(\tau) - y_1^{(k)}(\tau) \cos(\tau)\} d\tau \quad (2.6)$$

ამონახსნები (2.4) სისტემისა ვეძებთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_1^{(k)} \\ y_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_1^{(k)} \\ z_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k z_1^{(k)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

თუ ჩავსვავთ (2.5)-ს და (2.6)-ს (2.4) განტოლებათა სისტემაში და გამოვიყენებთ ამონახსნების პერიოდულობის (2.6) პირობას, მაშინ მივიღებთ შემოფოტების პირველ მეორე და მესამე რიგში (2.2) განტოლებათა სისტემის შემდეგ ამონახსნებს,  $x_1 = c$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1(0) = z_1(2\pi)$  საწყისი პირობებით:

$$x^{(1)}(\tau) = \frac{\delta \cos(\tau)}{2\lambda^2}, \quad y^{(1)} = -\frac{\sin(\tau)}{2\lambda}, \quad z^{(1)}(\tau) = \frac{\cos(\tau)}{2\lambda^2} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} x^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma\delta(-\beta \cos 2\tau + 4 \sin \tau(\alpha\lambda(\cos \tau - 1) + \beta\delta \sin \tau))}{16\lambda^6}, \\ y^{(2)}(\tau) = -\frac{(\alpha\gamma\lambda \cos \tau - \alpha\gamma\lambda \cos^2 \tau - \beta\gamma\delta \cos \tau \sin \tau)}{4\lambda^5}, \\ z^{(2)}(\tau) = \frac{\gamma(-\beta\delta^2 \cos 2\tau + 4 \sin \tau(\alpha\lambda(\cos \tau - 1) + \beta\delta \sin \tau))}{16\lambda^6}, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
x^{(3)}(\tau) &= \left( -\frac{\beta^2 \gamma^2 \delta}{16\lambda^{10}} + \frac{9\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{512\lambda^{10}} - \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{32\lambda^{10}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^4}{256\lambda^{10}} - \frac{3\alpha^2 \gamma^2 \delta}{32\lambda^8} \right) \cos \tau + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \cos 2\tau}{8\lambda^8} + \\
&\left( \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta}{48\lambda^{10}} - \frac{11\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{153\lambda^{10}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{32\lambda^{10}} - \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^4}{256\lambda^{10}} - \frac{\alpha^2 \gamma^2 \delta}{32\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \\
&+ \left( -\frac{\alpha\beta\gamma^2}{4\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{64\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{16\lambda^9} - \frac{3\alpha\beta\gamma^2 \delta^3}{128\lambda^9} \right) \sin \tau + \\
&+ \left( \frac{\alpha\beta\gamma^2}{16\lambda^9} + \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{8\lambda^9} \right) \sin 2\tau + \left( -\frac{\alpha\beta\gamma^2}{48\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2}{192\lambda^9} - \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{16\lambda^9} + \frac{3\alpha\beta\gamma^2 \delta^3}{128\lambda^9} \right) \sin 3\tau \\
y^{(3)}(\tau) &= \left( -\frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{16\lambda^8} - \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{128\lambda^8} \right) \cos \tau - \frac{\alpha^2 \gamma^2 \cos 2\tau}{8\lambda^8} + \left( -\frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{16\lambda^8} + \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{128\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \\
&+ \left( -\frac{13\beta^2 \gamma^2 \delta}{512\lambda^9} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{32\lambda^9} + \frac{7\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{256\lambda^9} + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{32\lambda^7} \right) \sin \tau - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{8\lambda^7} \sin 2\tau + \\
&\left( \frac{3\beta^2 \gamma^2 \delta}{512\lambda^9} - \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{32\lambda^9} - \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{256\lambda^9} + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{32\lambda^7} \right) \sin 3\tau \\
z^{(3)}(\tau) &= \left( \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta}{16\lambda^{10}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{32\lambda^{10}} - \frac{3\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{256\lambda^{10}} - \frac{3\alpha^2 \gamma^2}{32\lambda^8} \right) \cos \tau + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \cos 2\tau}{8\lambda^8} + \\
&\left( -\frac{\beta^2 \gamma^2 \delta}{512\lambda^{10}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^2}{96\lambda^{10}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 \delta^3}{768\lambda^{10}} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{32\lambda^8} \right) \cos 3\tau + \left( \frac{7\alpha\beta\gamma^2 \delta}{48\lambda^9} + \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{192\lambda^9} \right) \sin \tau + \\
&+ \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{16\lambda^9} \sin 2\tau + \frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{16\lambda^9} \sin 2\tau + \left( -\frac{\alpha\beta\gamma^2 \delta}{18\lambda^9} + \frac{5\alpha\beta\gamma^2 \delta^2}{192\lambda^9} \right) \sin \tau \cos 2\tau
\end{aligned} \tag{2.10}$$

შევუდგეთ მიღებული განტოლებების ანალიზს. თუ გავითვალისწინებთ იმას რომ,  $\lambda = \sqrt{1 + \delta^2} > |\delta|$  და  $|\alpha| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$  შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{|x^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|x^{(1)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|y^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|y^{(1)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|z^{(2)}(\tau)|_{\max}}{|z^{(1)}(\tau)|_{\max}} < \frac{5}{4} \frac{\gamma}{\lambda^3} < 1, \tag{2.11a}$$

$$\frac{|x^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|x^{(2)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|y^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|y^{(2)}(\tau)|_{\max}} \sim \frac{|z^{(3)}(\tau)|_{\max}}{|z^{(2)}(\tau)|_{\max}} < \frac{4}{5} \frac{\gamma}{\lambda^2} < 1. \tag{2.11b}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმას რომ  $\gamma = \frac{\eta M_0}{\omega_1}$  და  $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1}$ , (2.11) ფორმულების დახმარებით შეგვიძლია მივიღოთ კრიტიკული მნიშვნელობა:

$$\gamma_c = \frac{5}{4} \left( 1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\omega_1} \right)^2 \right). \tag{2.12}$$

როგორც (2.12) ფორმულიდან ჩანს არაწრფივობის პარამეტრის კრიტიკული მნიშვნელობა ცალსახად განისაზღვრება  $\omega - \omega_0$  სხვაობით და ცვლადი ველის ამპლიტუდით. ამ პარამეტრების ვარირებით შეგვიძლია მივადწიოთ გადასვლას ბირთვული დამაგნიტების რეგულარული დინამიკიდან:

$$\gamma < \gamma_c, \quad \omega_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_1} > \frac{4}{5} \eta M_0 \tag{2.13}$$

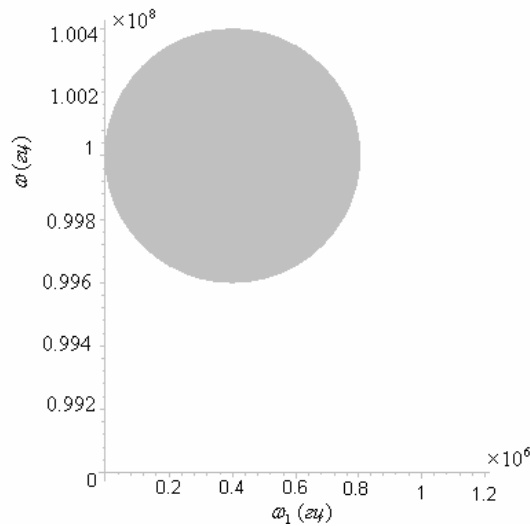
ქაოსური დინამიკის არეში:

$$\gamma > \gamma_c, \omega_1 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_1} < \frac{4}{5} \eta M_0. \quad (2.14)$$

(2.14) უტოლობიდან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$\left(\omega_1 - \frac{2}{5} \eta M_0\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2 < \left(\frac{2}{5} \eta M_0\right)^2 \quad (2.15)$$

ეს უტოლობა განსაზღვრავს  $\omega_1$  და  $\omega$  პარამეტრების იმ მნიშვნელობებს სადაც უნდა ველოდოთ დინამიური ქაოსის გამოვლინებას.  $\omega_1$  და  $\omega$ -თვის ეს არე წარმოადგენს წრეს (ნახ.2.1)



ნახ. 2.1 ძლიერი ანჰარმონიზმის არე  $(\omega_1; \omega)$  პარამეტრების სიბრტყეში წარმოდგენილია  $2\eta M_0/5$  რადიუსის წრით, რომლის ცენტრი განლაგებულია წერტილში  $(2\eta M_0/5; \omega_0)$ . დაშრტიხული არე განსაზღვრავს ცვლადი ველის პარამეტრების იმ მნიშვნელობებს რომლის დროსაც შესაძლებელია ქაოსის გამოვლინება. გრაფიკი აგებულია (2.15) ფორმულის თანახმად პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის  $\eta M_0 = 10^6$  ჰც და  $\omega_0 = 10^8$  ჰც.

მიღებული შედეგი საჭიროებს ახსნას. თუ გავიხსენებთ, რომ  $\gamma = \frac{\eta M_0}{\omega_1}$ , შეიძლება

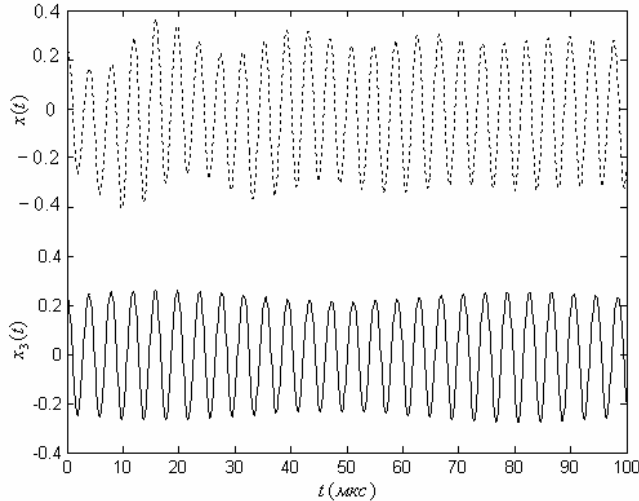
ვიფიქროთ, რომ ცვლადი ველის ამპლიტუდის  $\omega_1$  შემცირებით შეგვიძლია მივალწიოთ  $\gamma$ -ს მნიშვნელობის გაზრდას და ამრიგად დინამიური ქაოსის წარმოქმნისათვის საჭირო პირობების შექმნას. მეორეს მხრივ თუ არ გვექნება ცვლადი ველი არავითარ ქაოსზე ლაპარაკიც არ შეიძლება. ამ შეუსაბამობაზე პასუხი არის ის, რომ ცვლადი ველის ამპლიტუდის უბრალო შემცირებით შეუძლებელია მივალწიოთ  $\gamma > \gamma_c$  პირობის შესრულებას ( $\omega_1$  შემცირებით იზრდება  $\gamma_c$  ფორმულა (2.12)). ქაოსის მისაღწევად საჭიროა ცვლადი ველის პარამეტრების ისეთი შერჩევა, რომელიც უზრუნველყოფს ნახ.2.1 დაშტრიხულ არეში მოხვედრას.

(2.15) პირობა წარმოადგენს ქაოსის აღძვრის აუცილებელ მაგრამ არა საკმარის პირობას.  $\gamma$ -ს უფრო ზუსტი მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სისტემაში წარმოიქმნება ქაოსი, შეიძლება განისაზღვროს მხოლოდ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით.

(2.13) პირობა ადებს განსახილველი ამოცანის ფიზიკურ პარამეტრებს გარკვეულ პირობებს. თუ გამოვიყენებთ შეფასებას  $\eta M_0 \sim 10^6$  ჰც [53], რს ველის ამპლიტუდისათვის და ბმრ და რს სიხშირეების სხვაობისათვის მივიღებთ:

$$\omega_1 = 3.3 \cdot 10^5 \text{ ჰც}, |\omega - \omega_0| > 0.47 \cdot 10^6 \text{ ჰც} \quad (2.16)$$

(2.16) პირობის შესრულების დროს ე.ი. რს ველის ამპლიტუდისა და მზრ და რს სიხშირეების სხვაობის დიდი მნიშვნელობის დროს ბირთვული დამაგნიტების სისტემაში ხორციელდება რეგულარული, პერიოდული მოძრაობა. ამას ადასტურებს ისიც რომ ჩვენს მიერ მიღებული ანალიზური ამოსხნები კარგად ემთხვევა (2.2) სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებისას მიღებულ შედეგებს (ნახ.2.2)



ნახ. 2.2. ბირთვული დამაგნიტების განივი მდგენელის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკი მიღებულია (2.8-2.10) ფორმულების გამოყენებით და (2.2) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობების დროს:  $\omega_0 = 10^8$  ჰც,  $\omega_1 = 1.1 \cdot 10^6$  ჰც,  $\delta = 1.26$ ,  $\eta M_0 = 10^6$  ჰც,  $c = 1$ ,

$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\gamma_c = 3.23$ ,  $\gamma = 0.9$ . უწყვეტი ხაზი შეესაბამება ანალიზურ ამოსხნას რომელიც მიღებულია შეშფოთების თეორიის მესამე რიგში:  $x_3(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$ . წყვეტილი ხაზი მიღებულია (2.2) სისტემის რიცხვითი ინტეგრირების შედეგად რელაქსაციური პროცესების გათვალისწინების გარეშე. რიცხვითი შედეგები მიღებულია MatLab 7.0 პროგრამული პაკეტის გამოყენებით.

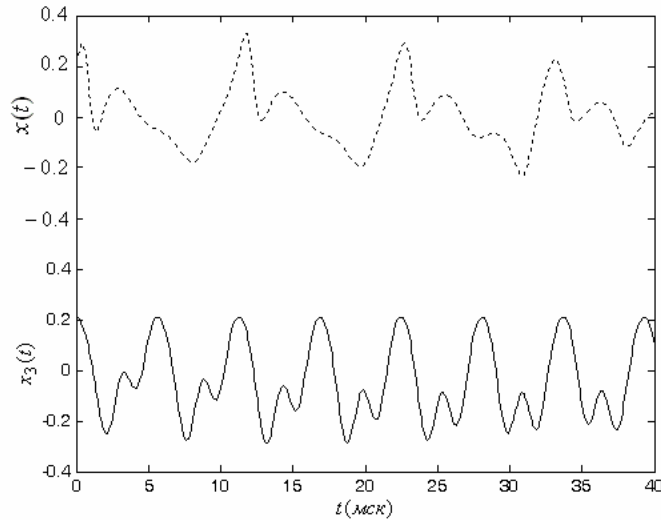
როგორც ნახ.2.2-დან ჩანს ბირთვული დამაგნიტების განივი კომპონენტის დროზე დამოკიდებულება ატარებს ჰარმონიულ ხასიათს. მართლაც, თუ ჩავსვავთ მოცემულ პარამეტრების მნიშვნელობებს 2.8-2.10 ამოსხნებში დავინახავთ რომ ჯერადი სიხშირეების კოეფიციენტები მცირეა:

$$x_3(\tau) \sim 0.24 \cdot \cos(\tau) - 0.001 \cdot \cos(2\tau) - 0.0001 \cdot \cos(3\tau) - 0.001 \cdot \cos(0.5\tau) \cdot \sin^3(0.5\tau) + \\ + 0.007 \cdot \cos(0.5\tau) \cdot \cos(\tau) \cdot \sin^3(0.5\tau) - 0.02 \cdot \sin(\tau) + 0.01 \cdot \sin(2\tau) - \\ - 0.0003 \cdot \cos(2\tau) \cdot \sin(\tau) + 0.01 \cdot \sin^2(\tau). \quad (2.17)$$

ცვლადი ველის ამპლიტუდის შემცირებით  $\omega_1 = 1.4 \cdot 10^5$  ჰც, სიტუაცია იცვლება მაღალი ჰარმონიკების როლი ხდება მნიშვნელოვანი:

$$\begin{aligned}
 x_3(\tau) \sim & 0.16 \cdot \cos(\tau) - 0.06 \cdot \cos(2\tau) - 0.07 \cdot \cos(3\tau) - 0.08 \cdot \cos(0.5\tau) \cdot \sin^3(0.5\tau) + \\
 & + 0.45 \cdot \cos(0.5\tau) \cdot \cos(\tau) \cdot \sin^3(0.5\tau) - 0.24 \cdot \sin(\tau) + 0.09 \cdot \sin(2\tau) - \\
 & - 0.01 \cdot \cos(2\tau) \cdot \sin(\tau) + 0.11 \cdot \sin^2(\tau),
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

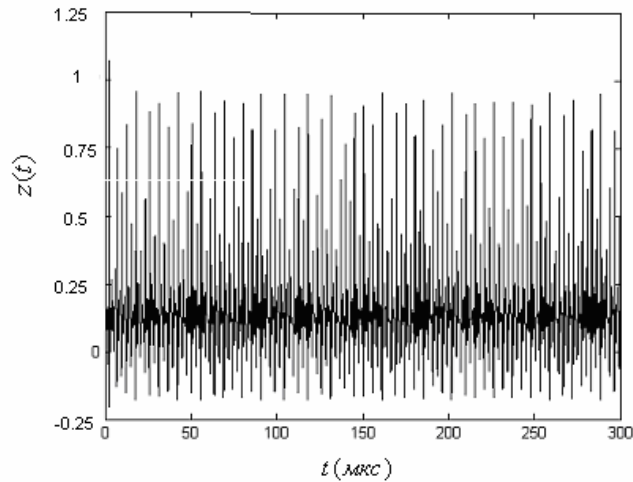
ამიტომ ამონახსნის დროზე დამოკიდებულებას აქვს პოლიქრომატული ხასიათი (ნახ.2.3).



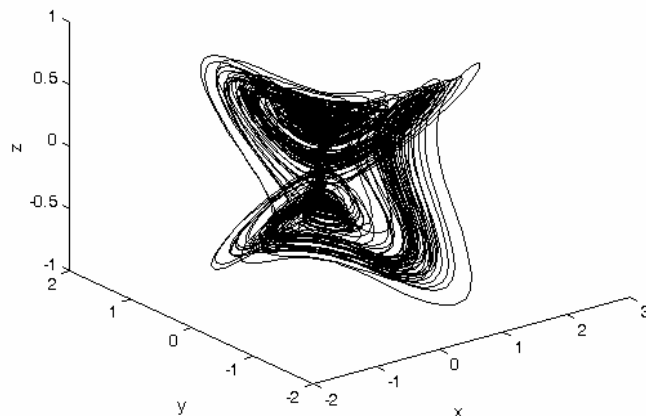
ნახ. 2.3. ბირთული დამაგნიტების განივი მდგენელის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკი მიღებულია (2.8-2.10) ფორმულების გამოყენებით და (2.2) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობების დროს:  $\omega_0 = 10^8$  ჰც,  $\omega_1 = 1.42 \cdot 10^5$  ჰც,  $\delta = 1.26$ ,  $\eta M_0 = 10^6$  ჰც,  $c = 1$ ,

$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\gamma_c = 3$ ,  $\gamma = 7$ . უწყვეტი ხაზი შეესაბამება ანალიზურ ამონახსნს რომელიც მიღებულია შეშფოთების თეორიის მესამე რიგში:  $x_3(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) + x^{(3)}(t)$ . წყვეტილი ხაზი მიღებულია (2.2) სისტემის რიცხვითი ინტეგრირების შედეგად, რელაქსაციური პროცესების გათვალისწინების გარეშე. როგორც ნახაზიდან ჩანს ანჰარონიულობის მიუხედავად, რხევებს აქვს რეგულარული ხასიათი.

$\gamma$  პარამეტრის შემდგომი გაზრდით (ეს შემდეგი მიიღწევა რს ველის მცირე ამპლიტუდების დროს) სისტემაში შეიძლება აღიძვრას დინამიური სტოქასტიურობა. საბოლოოდ საჭირო ხდება გადავიდეთ სისტემის მექანიკური აღწერიდან სტოქასტიურზე. იმ პროცესების აღსაწერად რომელიც დინამიურ სისტემაში ხდება, უნდა შემოვიტანოთ სტატისტიკური ცნებები- კოლმოგოროვის ენტროპია [30], უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება [3, 11, 15, 17, 18, 57-59]. ეს ცნებები, თავიანთი განსაზღვრის თანახმად არიან სტატისტიკური, ისინი მჭიდროდ არიან დაკავშირებულნი სისტემის მექანიკურ მახასიათებლებთან, კონკრეტულად ფაზური ტრაექტორიების ლოკალურ არამდგრადობებთან. ჩვენი მიზანია სისტემის ფიზიკური პარამეტრების განსაზღვრა რომლის დროსაც (2.1) სისტემაში წარმოიქმნება უცნაური ატრაქტორი. როგორც რიცხვითი გამოთვლები გვიჩვენებენ (ნახ.2.4-2.5) ფიზიკური პარამეტრების ამ მნიშვნელობებს წარმოადგენს:  $\eta M_0 = 10^6$  ჰც,  $\omega_1 = 2.9 \cdot 10^4$  ჰც,  $\omega_0 = 10^8$  ჰც,  $\delta = -1.26$ ,  $T_1 = 1.72 \cdot 10^{-4}$  წმ,  $T_2 = 0.86 \cdot 10^{-4}$  წმ,  $\alpha = 0.172$ ,  $\beta = 0.98$ .



ნახ. 2.4 ბირთვული დამაგნიტების გასწვრივი მდგენელის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, რომელიც მიღებულია (2.2) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით პარამეტრების იმ მნიშვნელობებისათვის რომელიც ტექსტში არის მოყვანილი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, რხევას აქვს ქაოსური ხასიათი.



ნახ. 2.5 უცნაური არაქტორის ფაზური პორტრეტი. გრაფიკი მიღებულია (2.2) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით. გამუქებული არეები შეესაბამება, მიმზიდავ წერტილებს, რომელთა არსებობა უცნაური ატრაქტორისათვის არის დამახასიათებელი.

თუმცა უცნაური ატრაქტორის არსებობა ქაოსის დამადასტურებელი ერთ-ერთი უტყუარი ნიშანია, ქაოსის სრულად დადასტურებისათვის საჭიროა შევისწავლოთ ამონახსნის კორელაციური ფუნქციის თვისებები.

კოლმოგოროვის ენტროპიის განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახით:

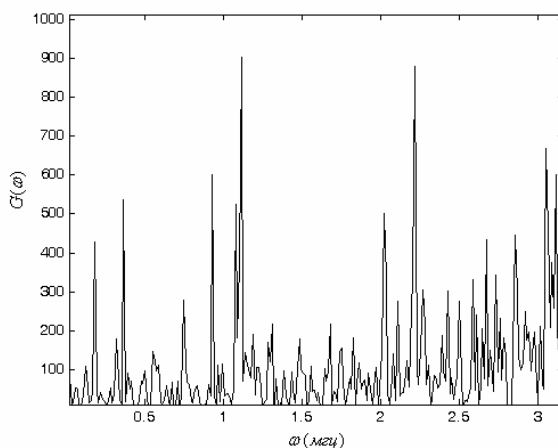
$$G_x(\tau) = \langle x(t+\tau)x(\tau) \rangle, \quad G_x = \int d\tau G_x(\tau) e^{i\omega\tau} = \frac{\tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \quad (2.19)$$

სადაც  $\langle ( ) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ( ) dt$  აღნიშნავს დროით საშუალოს,  $\tau_c$ -კორელაციის

დროა რომელიც დაკავშირებულია კოლმოგოროვის ენტროპიასთან შემდეგნაირად:  $h_0 \sim 1/\tau_c$ . (2.19)-ის გამოსათვლელათ ხელსაყრელია



ვისარგებლოთ სწრაფი ფურიე გარდაქმნის მეთოდით [60]. როგორც გვიჩვენებენ რიცხვითი გამოთვლები კორელაციის სიგრძე ტოლია  $\tau_c \sim 3 \cdot 10^{-6}$  წმ-ის. რიცხვითი გამოთვლების შედეგები მოყვანილია ნახ.2.6-ზე.



ნახ.2.6 კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახის  $\omega$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ის ფაქტი რომ კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახეს  $G(\omega)$ -ს აქვს სასრული სიგანე, დამადასტურებელია სისტემაში ქაოსის არსებობის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რხევითი პროცესი არ ხასიათდება მხოლოდ ერთი სიხშირით (პერიოდით). რხევით პროცესში ჩართულია ყველა სიხშირეები (პერიოდები), რომლებიც განლაგებულნი არიან სასრულ სიხშირულ ინტერვალში:  $\delta\omega \sim 1/\tau_c = 3$  მეგაჰერცი.

უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილების განსასაზღვად ვისარგებლოთ გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმით [57-59].

ალგორითმის არსი მდგომარეობს შემდეგში. დავუშვათ მოძრაობის დინამიკური განტოლებების ამოხსნებიდან მივიღეთ მდგომარეობათა ვექტორების კრებული  $\{\chi_i, i=1, 2, \dots, N\}$ , რომლებიც მიიღებიან დიფერენციალური განტოლებების ნაბიჯ-ნაბიჯ რიცხვითი ინტეგრირებისას. თუ შემოვიტანთ რაიმე მცირე  $\varepsilon$ -ს, შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიღებული ვექტორების კრებული შემდეგი ჯამის შეფასებისათვის:

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^N \theta(\varepsilon - |\chi_i - \chi_j|) \quad (2.20)$$

სადაც  $\theta$ - ხევისაიდის საფეხუროვანი ფუნქციაა:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

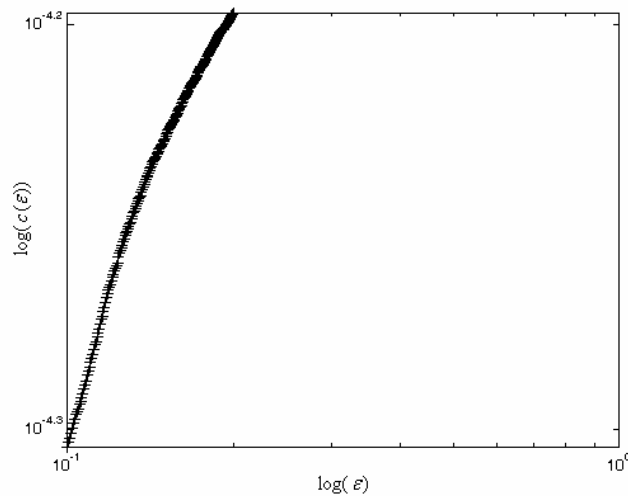
გრასბერგერ-პროკაჩიას ალგორითმის თანახმად, თუ ვიცით  $C(\varepsilon)$ , შეგვიძლია გამოვთვალოთ უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.22)$$

თუ გამოვთვლით  $C(\varepsilon)$ -ს  $\varepsilon$ -ის სახეადასხვა მნიშვნელობებისათვის, მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ  $\log(C(\varepsilon))$ -ის  $\log \varepsilon$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

თუ დავუშვებთ, რომ  $C(\varepsilon) \sim \varepsilon^D$ , მაშინ მოცემულ გრაფიკს ექნება წრფის სახე  $D$  კუთხური კოეფიციენტით. რიცხვითი გამოთვლების შედეგები მოცემულია ნახ. 2.7-ზე.

ამრიგად შეგვიძლია ვთქვათ რომ, ბირთვული დამაგნიტების თავის თავთან ურთიერთქმედებას მიყვაროთ მოძრაობის განტოლებების არაწრფივობამდე, რომელიც შეიძლება გახდეს მიზეზი ბლოხის (2.1) სისტემაში დინამიური სტოხასტიურობის გამოვლინებისა. (2.15)-ის თანახმად ქაოსის გამოვლინების აუცილებელ პირობა განისაზღვრება რეზონატორის და გარე ცვლადი ველის პარამეტრებით.. ამ პარამეტრების შესაბამისი არჩევით (თუ შესრულდება რეზონანსის პირობა  $\omega \sim \omega_0$  და გარე ველის ამპლიტუდა  $\omega_1 \sim \eta M_0$ ) ხდება სისტემის ქაოტიზაცია. შედეგად ბირთვული დამაგნიტების სისტემაში წარმოიქმნება უცნაური ატრაქტორი. ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილების გამოთვლილი მნიშვნელობა არ წარმოადგენს მთელ რიცხვს, რაც იმაზე მეტყველებს რომ სისტემაში გვაქვს ქაოსი.



ნახ.2.7.  $\log(C(\varepsilon))$ -ის  $\log \varepsilon$ - დამოკიდებულების გრაფიკი, რომელიც მიღებულია (2.2) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:  $\eta M_0 = 10^6$  ჰც,  $\omega_1 = 2.9 \cdot 10^4$  ჰც,  $\omega_0 = 10^8$  ჰც,  $\delta = 1.26$ ,  $T_1 = 1.72 \cdot 10^{-4}$  წმ,  $T_2 = 0.86 \cdot 10^{-4}$  წმ,  $\alpha = 0.172$ ,  $\beta = 0.98$ ,  $\gamma_c = 3.23$ . ამ გრაფიკიდან შეგვიძლია გამოვთვალოთ ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება ფორმულით:  $D = [\log(C(\varepsilon_2)) - \log(C(\varepsilon_1))] / [\log(\varepsilon_2) - \log(\varepsilon_1)] \approx 2.22$ ,  $\varepsilon_1 = 0.1$ ,  $\varepsilon_2 = 0.11$ .

### 3. თავი ერთგვაროვანი დამაგნიტების არაწრფივი და სტოქასტური დინამიკა თხელ მაგნიტურ სტრუქტურებში [61]

დამაგნიტების არაწრფივი პრეცესიული დინამიკის მიმართ ინტერესი აიხსნება დინამიური ეფექტების მრავალგვარობით, რომლებიც წარმოიქმნება როდესაც სპინურ სისტემაზე მოქმედებს მაღალსიხშირული ველი [62-64]. ამ დროს შესაძლებელია მივიღოთ დამაგნიტების პრეცესიის დიდი კუთხეები და მოვახდინოთ დინამიური ქაოსის რეალიზაცია. ერთ-ერთი ყველაზე ხელსაყრელი ობიექტს სხვადასხვა არაწრფივი დინამიური რეჟიმის განსახორციელებლად და გამოსაკვლევად წარმოადგენს თხელი მაგნიტური ფირები, რომლებიც გამოიყენება თანამედროვე ინტეგრალურ სქემებში.

უკანასკნელ წლებში ინფორმაციის მატარებლებისა და ჩაწერის ახალ მეთოდების გამოგონებისა და დამუშავებასთან დაკავშირებით ძალიან აქტუალური გახდა თხელი მაგნიტური ფირების გადამაგნიტების პრობლემის შესწავლა [64-69]. ამ დროს არაწრფივი რეგულარული და სტოქასტური რეჟიმის ძირითადი თავისებურებები შესაძლებელია გამოვლინდეს ერთგვაროვნად დამაგნიტებულ სტრუქტურებში. გარდა ამისა, არაწრფივი რეჟიმების პრაქტიკული გამოყენებისას, როდესაც მნიშვნელოვანია სისტემის რეაქცია გარე ზემოქმედებაზე, ერთგვაროვანი დამაგნიტების პრეცესიული დინამიკა არის უპირატესი.

როგორც ცნობილია გარე სტატიკური და მაღალსიხშირული მაგნიტური ველების ურთიერთპერპენდიკულარული ორიენტაციის დროს ერთგვაროვანი პრეცესია არის არამდგრადი. არსებობს სულ მცირე ორი მექანიზმი ენერჯის გადაცემისა ერთგვაროვანი პრეცესიიდან სპინურ ტალღებზე [69]: 1) სამმაგნონიანი – როდესაც ხდება მაგნონის  $\vec{k} = 0$  ტალღური ვექტორით დაშლა ორ მაგნონათ ტალღური ვექტორებით:  $\vec{k}$  და  $-\vec{k}$  სიხშირით  $\omega_{\vec{k}} = \omega_0 / 2$ , სადაც  $\omega_0$ -ერთგვაროვანი პრეცესიის სიხშირეა. 2) ოთხმაგნონიანი- რომლის დროსაც ორი მაგნონის ნაცვლად  $\vec{k} = 0$  ტალღური ვექტორით წარმოიქმნება ორი მაგნონი ტალღური ვექტორებით  $\vec{k}$  და  $-\vec{k}$ , სიხშირით  $\omega_0$ . როდესაც მაღალსიხშირული ველის სიხშირე მეტია ზღვრულ მნიშვნელობაზე  $\omega \geq \omega_0$  ზემოთ აღნიშნული პროცესები იწვევენ სპინ-ტალღურ არამდგრადობებს. სისტემაში შეიძლება გაჩნდეს სპინური ტალღები და მოხდეს ერთგვაროვანი პრეცესიის დატუმბვის ენერჯის გადადინება სპინურ ტალღებზე.

დამაგნიტების ერთგვაროვანი პრეცესიის დიდი გადახრის კუთხეების მისაღებად აუცილებელია შესრულდეს პირობა, რომლის დროსაც ზემოთ აღნიშნული არამდგრადობები სისტემაში არ წარმოიქმნება. ასეთი პირობა მდგომარეობს იმაში, რომ გარე ველის სიხშირე არ უნდა აღემატებოდეს  $\omega(k)$  ღრეჩოს სიხშირის მინიმალურ მნიშვნელობას სპინური ტალღების სპექტრში, ე.ი. უნდა შეესაბამებოდეს სპინ-ტალღური “ზონის” ფსკერს [62]. ეს მიიღწევა თხელ პერპენდიკულარულად დამაგნიტებულ ფირებში ფირის სისქის შერჩევით [71]. ამიტომაც პერპენდიკულარულად დამაგნიტებულ ფირებში როდესაც გარე ველის სიხშირე  $\omega \leq \omega_0$  ზემოთ აღნიშნული მექანიზმი ენერჯის გადაცემისა დამაგნიტების ერთგვაროვანი პრეცესიიდან სპინურ ტალღებზე არ რეალიზდება. ქვემოთ ჩავთვლით რომ ეს პირობა ყოველთვის სრულდება.

ფერომაგნიტურ ნიმუშებში, მაგნიტური ველის ფორმირებაში გარეშე მუდმივი  $H_0$  ველის გარდა მნიშვნელოვანი წვლილი შეაქვს განმაგნიტების ველს და მაგნიტური ანიზოტროპიის ველს  $H_A = \beta(M_z/M)$ , სადაც  $M$  ფერომაგნიტური ნიმუშის დამაგნიტებაა,  $M_z$  მისი  $z$  მდგენელი.  $z$  ღერძი მიმართულია დამაგნიტების მიმართულების გასწვრივ. რადგანაც მაგნიტური ანიზოტროპიის ველი პროპორციულია დამაგნიტების  $z$  მდგენელის, ამიტომაც დამაგნიტების ვექტორის დინამიკას აქვს არაწრფივი ხასიათი.

დამაგნიტების დინამიკა ერთგვაროვნად დამაგნიტებულ თხელ ფირებში ზოგადად აღიწერება ლანდაუ-ლიფშიცის განტოლებებით [69-75]. რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\dot{\vec{m}} = \gamma[\vec{m} \times \vec{H}] - \gamma\lambda[\vec{m} \times [\vec{m} \times \vec{H}]] \quad (3.1)$$

აქ  $\gamma$  გირომაგნიტური თანაფარდობაა,  $\vec{m} = \frac{\vec{M}}{M}$  დაყვანილი დამაგნიტებულობის ვექტორი,  $|\vec{m}|^2 = 1$ ,  $\lambda$  ფენომენოლოგიური მუდმივა. როგორც წესი  $\lambda \ll 1$  ამიტომ ამ განტოლების მეორე წევრი ბევრად მცირეა პირველ წევრთან შედარებით.

ლანდაუ-ლიფშიცის განტოლებების ამონახსნების კვლევას აქვს დიდი ხნის ისტორია [74-75], მაგრამ ამ განტოლებების მიმართ ინტერესი კვლავაც დიდია. საქმე იმაშია რომ არაწრფივობის გამო ამ განტოლებების ამონახსნებს გააჩნიათ სხვადასხვა ფიზიკური თვისებები: დაწყებული სოლიტონური ტიპის ამოხსნებით, დამთავრებული სტოხასტური ამოხსნებით [69,75-78].

დაუშვათ სისტემაზე მოქმედებს  $\vec{H}_0$  მუდმივი მაგნიტური ველი, რომელიც  $z$  ღერძის გასწვრივ არის მიმართული,  $h(t)$  რადიოსიხშირული ველი, რომელიც  $x$  ღერძის გასწვრივ არის მიმართული. ფერომაგნიტური კრისტალის შიგნით არსებობს მაგნიტური ანიზოტროპიის ველი, რომელიც, როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ ასევე  $z$  ღერძის გასწვრივ არის მიმართული. ამრიგად  $\vec{H}$  ველი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$\vec{H} = \vec{H}_0 + \beta m_z \vec{n} + \vec{h}(t)$ , აქ  $\vec{H}_0 = (0, 0, H)$  არის მუდმივი მაგნიტური ველი,  $\vec{h}(t) = (h(t), 0, 0)$  არის რადიოსიხშირული ველი და  $\beta m_z \vec{n}$  არის მაგნიტური ანიზოტროპიის ველი,  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორია მიმართული  $z$  ღერძის გასწვრივ.

ყოველივე ამის გათვალისწინებით (3.1) განტოლებათა სისტემა  $x, y, z$  კომპონენტებში შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= \gamma m_y (H_0 + \beta m_z) + \gamma \lambda h(t) - \gamma \lambda m_x (h m_x + m_z (H_0 + \beta m_z)) \\ \dot{m}_y &= -\gamma m_x (H_0 + \beta m_z) + \gamma m_z h(t) - \gamma \lambda m_y (h m_x + m_z (H_0 + \beta m_z)) \\ \dot{m}_z &= \gamma \lambda (H_0 + \beta m_z) - \gamma m_y h(t) - \gamma \lambda m_z (h m_x + m_z (H_0 + \beta m_z)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

თუ გადავაღოთ სფერულ კოორდინატებზე  $m_x = m_\perp \cos(\theta)$ ,  $m_y = m_\perp \sin(\theta)$ ,  $m_\perp^2 = m_x^2 + m_y^2$ ,  $m_\perp^2 + m_z^2 = 1$ , მაშინ (3.2) განტოლებათა სისტემა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{aligned} \dot{m}_\perp &= \gamma \lambda h \cos(\theta) + \gamma m_z h \sin(\theta) - \gamma \lambda m_\perp (h m_\perp \cos(\theta) + m_z (H_0 + \beta m_z)), \\ \dot{\theta} &= -\gamma (H_0 + \beta m_z) - \gamma \lambda \frac{h}{m_\perp} \sin(\theta) + \gamma \frac{m_z}{m_\perp} h \cos(\theta), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$m_z = -\gamma m_\perp \sin(\theta) h + \gamma \lambda (H_0 + \beta m_z) - \gamma \lambda m_z (m_x h + m_z (H_0 + \beta m_z)).$$

დავუშვათ რადიოსიხშირული ველი არა გვაქვს  $h(t) = 0$ , მაშინ (3.3) განტოლებათა სისტემა ხდება ინტეგრებადი, ამის საილუსტრაციოდ გადავწეროთ ის ასე:

$$\begin{aligned} \dot{m}_\perp &= -\gamma \lambda m_\perp m_z (H_0 + \beta m_z), \\ \dot{\theta} &= -\gamma (H_0 + \beta m_z), \\ \dot{m}_z &= \gamma \lambda (H_0 + \beta m_z) - \gamma \lambda m_z^2 (H_0 + \beta m_z) = \gamma \lambda H_0 (1 + \alpha m_z) (1 - m_z) (1 + m_z). \end{aligned} \quad (3.4)$$

აქ  $\alpha = \frac{\beta}{H_0}$ . შემოვიღოთ უგანზომილებო დრო  $\tau = \gamma H_0 t$ , მაშინ  $m_z$ -ისთვის

მივიღებთ :

$$\int \frac{dm_z}{(1 + \alpha m_z)(1 - m_z)(1 + m_z)} = \lambda \tau + c, \text{ აქ } c \text{ ინტეგრირების მუდმივია. ამ განტოლების}$$

ინტეგრებით მივიღებთ ტრანსცედენტულ განტოლებას  $s_z$ -ის მიმართ:

$$(1 + \alpha m_z)^{\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}} (1 - m_z)^{-\frac{1}{2(1 + \alpha)}} (1 + m_z)^{\frac{1}{2(1 - \alpha)}} = c_1 e^{\lambda \tau} = e^{\lambda(\tau + \tau_0)},$$

აქ  $c_1$  ინტეგრირების მუდმივია  $e^{\lambda \tau_0} = c_1$ .

(3.4) სისტემის მეორე და მესამე განტოლება გავყოთ ერთმანეთზე მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{d\theta}{dm_z} = -\frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{1 - m_z} + \frac{1}{1 + m_z} \right) \text{ საიდანაც ვღებულობთ რომ:}$$

$$\theta - \theta_0 = -\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1 + m_z}{1 - m_z} \text{ აქედან } m_z = -th(\lambda(\theta - \theta_0)), \theta_0 \text{ ინტეგრირების მუდმივია, ხოლო}$$

$$m_\perp = \sqrt{1 - m_z^2} = \frac{1}{ch\lambda(\theta - \theta_0)}.$$

ამრიგად (3.4) სისტემის ამოხსნას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha m_z)^{\frac{\alpha}{\alpha^2 - 1}} (1 - m_z)^{-\frac{1}{2(1 + \alpha)}} (1 + m_z)^{\frac{1}{2(1 - \alpha)}} &= c_1 e^{\lambda \tau} = e^{\lambda(\tau + \tau_0)}, \\ m_z &= -th(\lambda(\theta - \theta_0)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$m_{\perp} = \sqrt{1 - m_z^2} = \frac{1}{ch\lambda(\theta - \theta_0)}.$$

იმისათვის რომ გავერკვეთ (3.5) ამონახსნებში განვიხილოთ ზღვრული შემთხვევები:

1.  $\alpha \ll 1$ , ესე იგი  $\beta \ll H_0$ , არ ვითვალისწინებთ მაგნიტურ ანიზოტროპიას, საწყისი პირობები ავარჩიოთ შემდეგნაირად:  $m_z(0) = 0$ ,  $m_x(0) = 1$ ,  $m_y(0) = 0$ , მაშინ

(3.6)-დან მივიღებთ  $m_z = th\lambda\tau$ ,  $\theta = -\tau$ ,  $m_{\perp} = \frac{1}{ch\lambda\tau}$ . საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$\begin{cases} m_z = th\lambda\tau, \\ m_x = \frac{\cos\tau}{ch\lambda\tau}, \\ m_y = -\frac{\sin\tau}{ch\lambda\tau}. \end{cases} \quad (3.6)$$

როცა  $\tau \rightarrow \infty$ , მაშინ  $m_z \rightarrow 1$ ,  $m_x \rightarrow 0$ ,  $m_y \rightarrow 0$ . ესე იგი ადგილი აქვს სპინის რელაქსაციას  $z$  ღერძის გასწვრივ.

2.  $\alpha \gg 1$ , ესე იგი  $\beta \gg H_0$ , მაშინ (6) დან მივიღებთ:

$$m_z = \pm \sqrt{1 - e^{-2\lambda\alpha(\tau + \tau_0)}}, \quad (3.7)$$

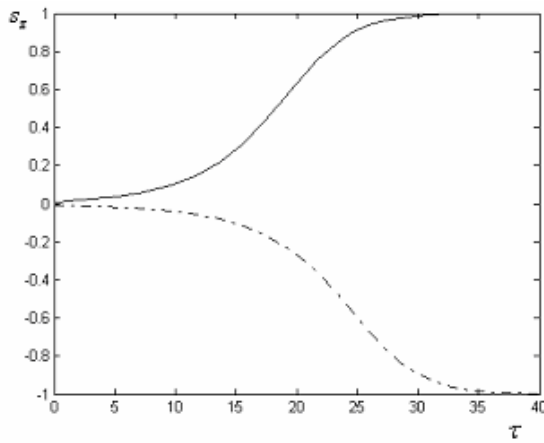
ესე იგი ამ შემთხვევაშიც ადგილი აქვს სპინის რელაქსაციას  $z$  ღერძის გასწვრივ.

(3.5) ამონახსნს ადგილი აქვს მაშინ, როცა  $\alpha \neq 1$ , როცა  $\alpha = 1$  ანუ როცა  $\beta = H_0$  მაშინ უნდა მოხდეს (3.4) განტოლებათა სისტემის ცალკე ინტეგრირება, ინტეგრირების შედეგად მივიღებთ:

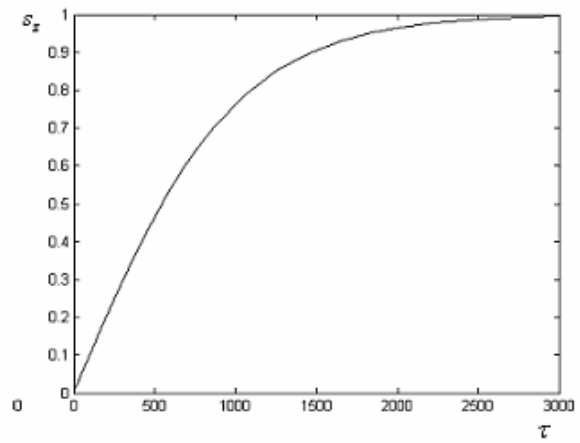
$$\begin{cases} \lambda(\theta - \theta_0) - 2\lambda(\tau + \tau_0) = \frac{1}{1 + m_z}, \\ m_z = -th\lambda(\theta - \theta_0), \\ m_{\perp} = \frac{1}{ch\lambda(\theta - \theta_0)}. \end{cases} \quad (3.8)$$

აქ  $\theta_0$  და  $\tau_0$  ინტეგრირების მუდმივებია.

ამრიგად გარე მუდმივი მაგნიტური ველი და შიდა ანიზოტროპიის ველი ხელს უშლის დამაგნიტებულობის გადახრას ველის მიმართულებიდან.



ა)



ბ)

ნახ.3.1  $m_x$  და  $m_z$  ის დროზე დამოკიდებულება, რომელიც მიიღება (3.4) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებით როცა ა)  $\lambda = 0.001$  და  $\alpha = 200$ .

აქ საწყის პირობად აღებულია ზედა მრუდისათვის  $m_z(0) = 0.01$  და ქვედა მრუდისათვის  $m_z(0) = -0.01$ . ორი მრუდი შეესაბამება (3.7) ამონახსნში  $m_z$ -ის წინ  $\pm$  ნიშანს, ზედა  $+$  ნიშანს ქვედა  $-$  ნიშანს.

ბ)  $\lambda = 0.001$ ,  $\alpha = 0.01$  აქ საწყის პირობად აღებულია  $m_z(0) = 0$ .

ამრიგად როდესაც სისტემაზე მოქმედებს მონოქრომატული ველი, მას არ შეუძლია გამოიწვიოს დამაგნიტებულობის საგრძნობი გადახრა.

ქვემოთ ნაჩვენებია იქნება, რომ ანიზოტროპიის ველი, რომელიც ხელს უშლის დამაგნიტებულობის გადახრას, სისტემის მაღალი სიხშირის პერიოდული იმპულსებით დატუმბვისას, ის პირიქით ხელს უწყობს დიდი გადახრების მიღებას.

დამაგნიტებულობის დიდი გადახრების მისაღებად ჩვენი აზრით ხელსაყრელია ვისარგებლოთ სტოხასტური გაჯერების მეთოდით, რომლის არსი მდგომარეობს შემდეგში. დავუშვათ გვაქვს მაღალი სიხშირის იმპულსები სერია (ნახ.3.2):

$h(t) = 2\lambda h_1 \cos(\omega t) F(t)$ ,  $\vec{h} \perp \vec{z}$  სადაც  $2\lambda h_1$  და  $\omega$  მაღალი სიხშირის ველის

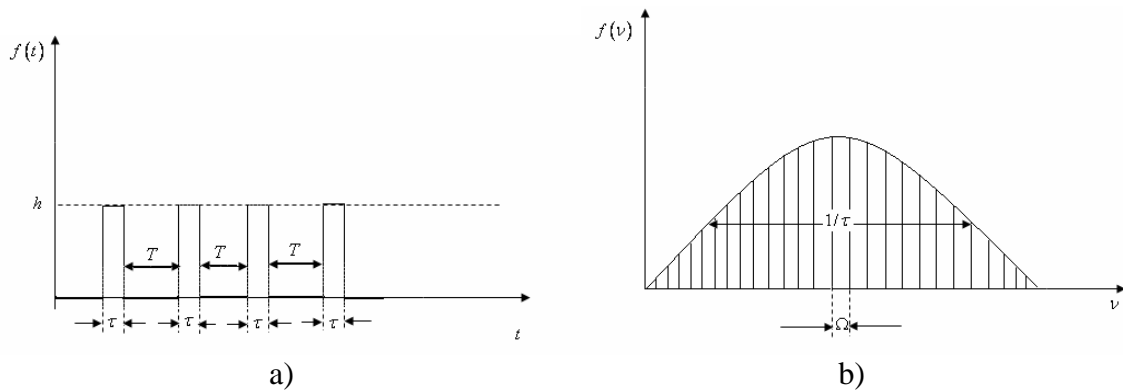
ამპლიტუდა და სიხშირეა,  $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{T} - n\right)$ ,  $f\left(\frac{t}{T} - n\right)$  განსაზღვრავს

იმპულსების ფორმას რომელიც მოქმედებს სისტემაზე. თუ  $f\left(\frac{t}{T} - n\right) = \delta\left(\frac{t}{T} - n\right)$ ,

მაშინ:  $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - Tn)$ , ესე იგი გვაქვს ბიძგები რომლებიც

მოქმედებს სისტემაზე  $T$  დროის ინტერვალით. გავშალოთ  $F(t)$  ფურიე მწკრივად:

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\Omega t}, \text{ სადაც } \Omega = \frac{2\pi}{T}. \text{ აქედან } h(t) = 2\lambda h_1 \cos \omega t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\Omega t}.$$



ნახ.3.2 a) სწორკუთხა იმპულსების სერია. b) სწორკუთხა იმპულსების პერიოდული სერიის ფურიე გაშლის ეკვიდისტანტური სპექტრი.

როდესაც სისტემაზე მოქმედებს ასეთი ფორმის იმპულსები მაშინ სისტემის პარამეტრების შერჩევით შეიძლება მივიღოთ გადახრის დიდი კუთხეები დამაგნიტების ვექტორისათვის. მართლაც იმის გამო პერიოდული იმპულსების სერიის სპექტრში გვაქვს ბევრი ჰარმონიკები, რომლებიც ჯერადია  $\Omega$  სიხშირის, მოძრაობის არაწრფივობის გამო შეიძლება წარმოიქმნას რეზონანსების გადაფარვის ეფექტი [30]. ამ დროს დამაგნიტებულობას არ შეუძლია გაჩერდეს ერთი რომელიმე ჰარმონიკის რეზონანსის მიდამოში, არამედ დაეხეტება სხვადასხვა ჰარმონიკების რეზონანსებზე და შედეგად სისატემაზე იმპულსების სერიის მოქმედების განმავლობაში სისტემა გამუდმებით შთანთქავს ენერგიას [30].

სტოხასტური გაჯერების მეთოდი ადრე გამოყენებული იყო მაგნეტურად მოწესრიგებული კრისტალების ბირთვულ მაგნიტურ რეზონანსში სიხშირის დიდი დინამიური წანაცვლებით [79-82].

ღანდაუ- ლიფშიცის განტოლებები დამაგნიტებისათვის მბრუნავ კოორდინატთა სისტემაში ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{cases} \frac{dm_z}{dt} = m_{\perp} V(\theta, t) + \lambda \omega_1(m_z)(1 - m_z^2); \\ \frac{d\theta}{dt} = -\omega(m_z) - \frac{m_z}{m_{\perp}} \cdot \frac{\partial V(\theta, t)}{\partial \theta}; \end{cases} \quad (3.9)$$

სადაც  $V(\theta, t) = -\omega_1 \sin \varphi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{T} - n\right)$ ,  $\vec{m} = \frac{\vec{M}}{M}$ ,  $\omega(m_z) = \omega_0 - \omega - \omega_p m_z$ ,

$$m_{\perp} = \sqrt{1 - m_z^2}, \quad \omega_1 = \gamma h, \quad \omega_p = \gamma \beta, \quad \omega_1 = \omega_0 + \omega_p m_z.$$

სადაც  $\theta$  დამაგნიტების განივი მდგენელის ბრუნვის ფაზაა.

თუ ჩავთვლით, რომ იპულსებს აქვთ  $\delta$  ფუნქციის ფორმა  $|\omega(m_z)|\tau \ll 2\pi$ , ( $\tau$ -

თითოეული იმპულსის  $f\left(\frac{t}{T} - n\right)$  ხანგრძლივობაა), და გარე ცვლადი ველი

მცირეა  $\tilde{\omega}_1 T \ll 1$  ( $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 \frac{\tau}{T}$ ), როგორც ნახვენებია შრომებში [79-82]

სტოხასტურობის პარამეტრის მნიშვნელობისათვის  $K \approx T^2 \tilde{\omega}_1 \omega_p \gg 1$ , იმ რიგის დროებისათვის რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $t \gg t_0 = 2T / \ln K$ ,  $\vec{m}$  დამაგნიტებულობის ვექტორის მოძრაობა ხდება შემთხვევითი და აღიწერება განაწილების ფუნქციით  $F(s_z, t)$ , რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეული ტიპის განტოლებას, კერძოდ ფოკერ-პლანკის განტოლებას.



$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial}{\partial m_z} (\omega_1(m_z)m_{\perp}^2 F) + D \frac{\partial}{\partial m_z} m_{\perp}^2 \frac{\partial F}{\partial m_z}. \quad (3.10)$$

სადაც  $D = \frac{\omega_1^2 T}{4}$  დიფუზიის კოეფიციენტი. გადასვლა დინამიური აღწერიდან სტატისტიკურზე ხდება ზასლავსკის მეთოდით [29-30], ეს მეთოდი განხილული იყო შესავალში და ამიტომ მასზე აღარ შევხერდით და მოვიყვანთ საბოლოო შედეგს.

თუ (3.10) განტოლებას გავამრავლებთ დამაგნიტებულობის  $z$  კომპონენტზე და გავაინტეგრირებთ  $-1$ -დან  $+1$ -მდე, მივიღებთ გასწვრივი დამაგნიტებულობის საშუალო მნიშვნელობისათვის შემდეგ მოძრაობის განტოლებას:

$$\frac{d\bar{m}_z}{dt} = -2D\bar{m}_z + \lambda\omega_0 \left(1 + \frac{\omega_p}{\omega_0} \bar{m}_z\right) (1 - \bar{m}_z^2) \quad (3.11)$$

(3.11) განტოლების ანალიზისათვის საკმარისია შემოვისაზღვროთ  $\omega_p < \omega_0$  შემთხვევით, რადგან ეს შემთხვევა შეესაბამება რელურ ფიზიკურ სიტუაციას. თუ გავითვალისწინებთ პირობას  $\omega_p < \omega_0$  და  $\bar{m}_z < 1$ , მაშინ ადვილი დასანახია რომ,  $\frac{\omega_p}{\omega_0} \bar{m}_z$  წევრი ბევრად ნაკლებია ერთზე და (3.11) განტოლების მარჯვენა მხარეს ის შეგვიძლია უგულებელვყოთ.

აღნიშნული დაშვების გათვალისწინებით (3.11) განტოლება იღებს უფრო მარტივ სახეს :

$$\frac{d\bar{m}_z}{dt} = f(\bar{m}_z) = -2D\bar{m}_z + \lambda\omega_0 (1 - \bar{m}_z^2) \quad (3.12)$$

(3.12) განტოლების სტაციონარულ წერტილებს წარმოადგენს:

$$(\bar{m}_z)_1 = \left( \sqrt{1 + \left(\frac{D}{\lambda\omega_0}\right)^2} - \left(\frac{D}{\lambda\omega_0}\right) \right), \quad (\bar{m}_z)_2 = - \left( \sqrt{1 + \left(\frac{D}{\lambda\omega_0}\right)^2} + \left(\frac{D}{\lambda\omega_0}\right) \right) \quad (3.13)$$

მხოლოდ ამონახსნი  $(\bar{m}_z)_1$  არის მდგრადი ფიზიკური ამონახსნი, რადგანაც  $f'((\bar{m}_z)_1) < 0$  და  $|(\bar{m}_z)_1| < 1$  და საშუალო დამაგნიტებულობა  $\bar{m}_z$  უნდა მიისწრაფის  $(\bar{m}_z)_1$  მნიშვნელობისაკენ. ეს ჩანს (3.12) განტოლების ამონახსნიდანაც:

$$\bar{m}_z(t) = \frac{(\bar{m}_z)_1(1 - (\bar{m}_z)_2) - (\bar{m}_z)_2(1 - (\bar{m}_z)_1) \cdot \exp\left(-2\omega_0 t \sqrt{\lambda^2 + (D/\omega_0)^2}\right)}{(1 - (\bar{m}_z)_2) - (1 - (\bar{m}_z)_1) \cdot \exp\left(-2\omega_0 t \sqrt{\lambda^2 + (D/\omega_0)^2}\right)} \quad (3.14)$$

აქ საწყის პირობად აღებულია  $\bar{m}_z(0) = 1$ .

როგორც (3.14)-დან ჩანს როცა  $t \rightarrow \infty$ , დამაგნიტებულობა მიისწრაფის მნიშვნელობისაკენ:  $\bar{m}_z \rightarrow (\bar{m}_z)_1$

$(\bar{m}_z)_1$  შეფასებისათვის გამოვიყენოთ პარამეტრების მნიშვნელობები რომლებიც შერჩეულია რეალური თხელი ფირებისათვის ( $Fe-Ni$  და  $Fe-Co-Ni$  შენადნობები) [83]:  $\lambda = 10^{-5}$ ,  $\omega_0 = 10^9$  ჰც,  $D = 14 \cdot 10^4$  წმ<sup>2</sup>. შედეგად მივიღებთ შეფასებას,  $(\bar{m}_z)_1 \approx 0.035$ , რაც კარგად ეთანხმება რიცხვითი გამოთვლების შედეგებს (ნახ 3.3-3.4).

კარგი თანხვედრა (3.11) ზუსტი განტოლების რიცხვით ამოხსნასა და (3.12) მიახლოებითი განტოლების ანალიზურ ამოხსნას შორის (ორივე შემთხვევაში ამონახსნი ექსპონენციალურად მიისწრაფის  $(\bar{m}_z)_1$  მნიშვნელობისაკენ) მეტყველებს იმაზე, რომ (3.11) განტოლებაში  $\frac{\omega_p}{\omega_0} \bar{m}_z$  წევრი შეგვიძლია

უგულებელვყოთ.

შევნიშნოთ რომ მიღებული (3.14) ანალიზური ამოხსნა ცხადი სახით არ არის დამოკიდებული  $\omega_p$  სიხშირის წანაცვლებაზე, მაგრამ თვით კინეტიკური აღწერის გამოყენების პირობა  $K \approx T^2 \omega_0 \omega_p \gg 1$  დამოკიდებულია  $\omega_p$ -ზე.

მოცემული თეორია შეძლება გამოყენებულ იქნას პერმალოიდების კლასის თხელფირიან შენადნობებში ფერომაგნიტური რეზონანსის გამოსაკვლევადაც [69].

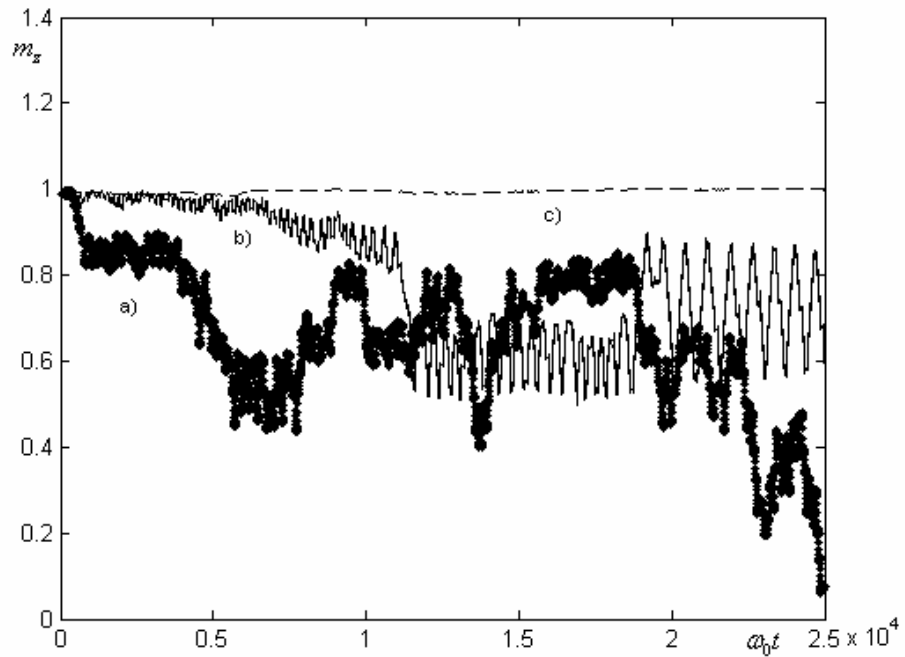
ფირების სისქე ითვლება  $d=1$  მკმ-ის ტოლად. ანიზოტროპიის ველი შეიძლება შეფასდეს ფორმულით [83]:  $\beta = \frac{2K_1}{M_s}$ , სადაც  $K_1$  ანიზოტროპიის კოეფიციენტი,  $M_s$  გაჯერებულობის დამაგნიტებულობა.

ბოლოს მოვიყვანოთ (3.9) და (3.11) განტოლებების რიცხვითი ინტეგრირების შედეგები.

როგორც გრაფიკებიდან ჩანს შედეგები რომელიც მიიღება (3.9) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით რომელიც წარმოდგენილია 3.3 გრაფიკზე კარგ თანხვედრაშია (3.11) განტოლების რიცხვითი ინტეგრირებისას მიღებულ შედეგთან რომელიც წარმოდგენილია 3.4 ნახაზზე. კერძოთ ქაოსურ შემთხვევაში სტოხასტურობის კოეფიციენტით  $K > 1$ , რომელსაც ნახ.3.3-ზე შეესაბამება a) ხაზი, ჩვენ ვხედავთ, რომ გასწვრივი დამაგნიტებულობის მდგენელი ხდება დაახლოებით ტოლი  $m_z \approx 0.035$ , რაც კარგ თანხვედრაშია ნახ 3.4-ზე წარმოდგენილ შედეგთან. არაქაოსურ შემთხვევაში  $K < 1$ , რომელიც წარმოდგენილია ნახ.3.3-ზე c) მრუდით, დამაგნიტების გასწვრივი მდგენელი ინარჩუნებს თავის თავდაპირველ მნიშვნელობას. b) მრუდი შეესაბამება შუალედურ შემთხვევას სტოხასტურობის კოეფიციენტით  $K \approx 1$ . როგორც ჩვენ ვხედავთ ამ შემთხვევაში დამაგნიტებულობის გასწვრივი მდგენელი გადაისრება წონასწორობის მდგომარეობიდან, მაგრამ სტოხასტური გაჯერება არა ხდება. როგორც ნახაზების წარწერებიდან ჩანს ფიზიკური პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობების შერჩევა შეესაბამება კონკრეტულ ფიზიკურ ნივთიერებებს.

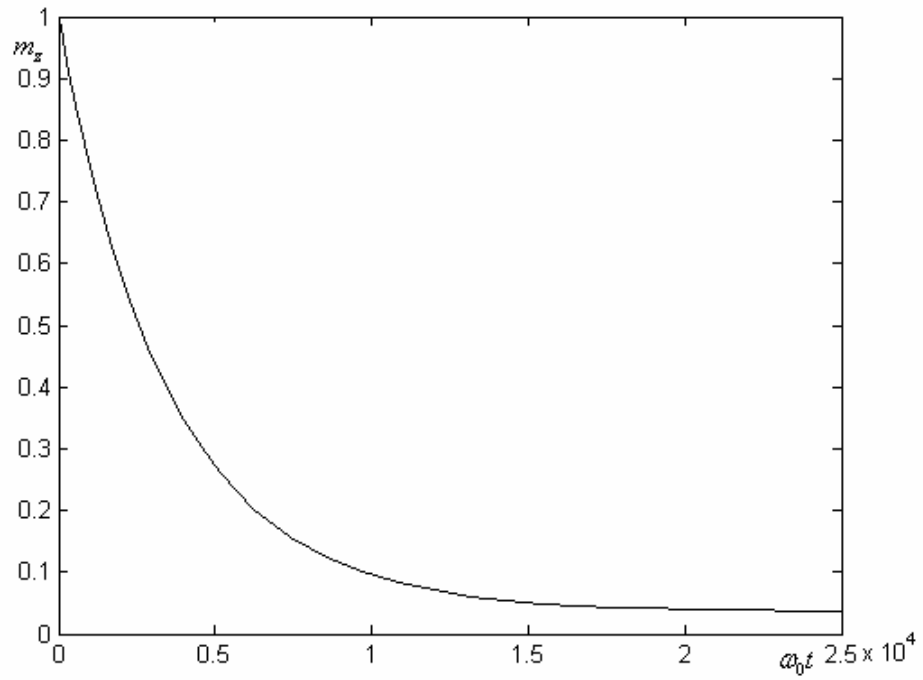
ეს იმას ნიშნავს რომ სტატისტიკური მიდგომა არაწრფივი პრეცესირებადი სისტემების დინამიკისადმი ადეკვატურია.

ამრიგად, არაწრფივობის გაძლიერება მაღალი სიხშირის პერიოდული იმპულსების გამოყენებით ხელს უწყობს დამაგნიტებულობის გაჯერებას გადახრას მის წონასწორობის მდგომარეობიდან.



ნახ. 3.3  $m_z$ -ის  $\omega_0 t$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი, აგებული (3.9) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით, მიღებულია პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:  $\omega_0 = 10^9$  ჰც,  $\omega = 0.6 \cdot 10^9$  ჰც,  $\Omega = 10^8$  ჰც,  $T = 2\pi \cdot 10^{-8}$  წმ,  $\tau = 2\pi \cdot 10^{-10}$  წმ,  $\lambda = 10^{-5}$ .

a) და c) საზები შეესაბამება  $Fe-Ni$  შენადნობის შემთხვევას ( $Fe-25\%, Ni-75\%$ ), ამ შემთხვევაში [83]  $K_1 = 15 \cdot 10^3$  ერგი/სმ<sup>3</sup>,  $M_s = 914$  გაუსი,  $\beta = 32.8$  ერსტედი,  $\omega_p = 0.57 \cdot 10^6$  ჰც, a) შემთხვევისათვის  $\tilde{\omega}_1 = 1.5 \cdot 10^6$  ჰც და სტოხასტურობის კოეფიციენტი  $K = 3.37$ , c) შემთხვევისათვის  $\tilde{\omega}_1 = 1.5 \cdot 10^5$  ჰც და სტოხასტურობის კოეფიციენტი  $K = 0.337$ , b) საზი შეესაბამება  $Fe-Co-Ni$ , ( $Fe-25\%, Co-25\%, Ni-50\%$ ) ამ შემთხვევაში  $K_1 = 4 \cdot 10^3$  ერგი/სმ<sup>3</sup>,  $M_s = 1025$  გაუსი,  $\beta = 7.27$  ერსტედი,  $\omega_p = 0.138 \cdot 10^9$  ჰც,  $\tilde{\omega}_1 = 1.5 \cdot 10^6$  ჰც,



ნახ 3.4  $m_z$ -ის  $\omega_0 t$  დამოკიდებულების გრაფიკი აგებული (3.11) განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით, მიღებულია პარამეტრების შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობებისათვის:  $\omega_0 = 0.6 \cdot 10^9$  კც,  $\Omega = 10^8$  კც,  $T = 2\pi \cdot 10^{-8}$  წმ,  $\tau = 2\pi \cdot 10^{-10}$  წმ,  $\lambda = 10^{-5}$ ,  $\omega_p = 0.57 \cdot 10^9$  კც,  $\tilde{\omega} = 2.9 \cdot 10^6$  კც,  $D = 14 \cdot 10^4$  წმ<sup>-1</sup> და სტოხასტურობის კოეფიციენტი  $K \approx 6.5$ .

## 4. თავი არაწრფივი სპინური სისტემების სტოქასტური კონტროლი [84-85]

### 4.1 შესავალი

ბოლო დროს სამეცნიერო ლიტერატურაში სპინური სისტემები განიხილება როგორც ერთ-ერთი იმედის მომცემი კანდიდატი კვანტური კომპიუტერის შექმნის თვალსაზრისით [86-92]. ამ აზრით სპინურ სისტემებში მნიშვნელოვანია არაწონასწორული სპინური მდგომარეობის შექმნა და მისი კონტროლი. წრფივ სპინურ სისტემებში, რომლებიც იმყოფებიან გარე მუდმივ მაგნიტურ ველში  $H_0$ , სპინები შეიძლება გადახრილი იყვნენ თუ მათ მოვდებთ ცვლად მაგნიტურ ველს  $h(t)$ ,  $H_0$  ველის მიმართულების პერპენდიკულარულად.

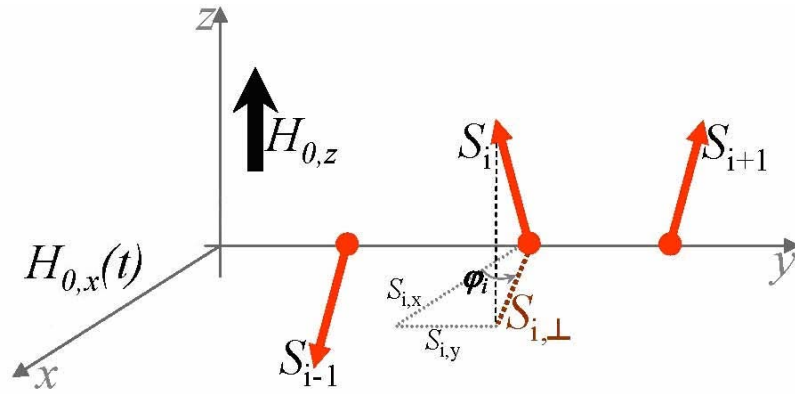
გადახრის კუთხე მაშინ არის  $\theta = \omega_1 \tau$ , სადაც  $\omega_1$  არის ცვლადი ველის ამპლიტუდა სიხშირულ ერთეულებში  $\omega_1 = h_0 \gamma$  ( $h_0$  ცვლადი ველის ამპლიტუდაა,  $\gamma$  გირომაგნიტური თანაფარდობაა),  $\tau$  იმპულსის ხანგრძლივობა [54]. ამასთან  $\omega_1$  უნდა იყოს რეზონანსში სისტემის ზეემანის სიხშირესთან  $\omega_0 = \gamma H_0$ .

არაწრფივი სპინური სისტემებისათვის სიტუაცია სრულიად განსხვავებულია: სისტემის საკუთარი სიხშირე არის დინამიკური და დამოკიდებულია ოსცილაციის ამპლიტუდაზე [30]. მაგალითად არაწრფივი ფერომაგნიტური რეზონანსის დროს სიხშირის დიდი დინამიური წანაცვლებით ზეემანის სიხშირე დამოკიდებულია დამაგნიტების  $z$  პროექციაზე ე. ი.  $\omega_0 = \omega_0(z)$  [42-43]. რადგანაც  $s_z(t)$  იცვლება დროში რეზონანსის პირობა არ შეიძლება იყოს იგივე რაც წრფივ შემთხვევაში.

იმ საკითხთან ერთად თუ რა გზით უნდა გადავხაროთ სპინები ეფექტურად, მნიშვნელოვანია აგრეთვე თუ რამდენ ხანს დარჩება სისტემა გადახრილ (არაწონასწორულ) მდგომარეობაში ანუ რამდენად იქნება ის დინამიურად ჩაჭერილი ის ამ მდგომარეობაში. თუ არაწონასწორული მდგომარეობა იშლება სწრაფად, ვიდრე გაზომვის დროა, მაშინ ეს გამოყენების თვალსაზრისით ნაკლებად სასარგებლოა. გაცილებით საინტერესოა ის შემთხვევა როდესაც საწყისი მდგომარეობიდან გადახრილი სპინური სისტემა გარე ველის პარამეტრების სათანადო შერჩევით საკმაოდ დიდხანს დარჩება გადახრილ მდგომარეობაში, რასაც ეძახიან დინამიურ გაყინვას (ჩაჭერას). [93-94] ჩვენ განვიხილავთ არწრფივ, ურთიერქმედ სპინურ სისტემას იმ მიზნით რომ

გამოვიკვლიოთ გადახრილი სპინური მდგომარეობების დინამიური გაყინვა. ამ მიზნით ჩვენ შემოგვაქვს სტოხასტური კონტროლის მექანიზმი: მოვმართავთ რა არაწრფივ სპინურ სისტემას სტოხასტურ რეჟიმში გარე ველის პარამეტრების სათანადო შერჩევით, ჩვენ შეგვიძლია ის გადავიყვანოთ სასურველ მდგომარეობაში და შემდეგ სტიმულირება გავუკეთოთ სტოხასტურ გაყინვას. ილუსტრირებისათვის ჩვენ განვიხილავთ სპინურ მძივს გაცვლითი ურთიერთქმედებით გარე ცვლად მაგნიტურ ველში [95-96].

თავიდან განვიხილავთ ორი ბმული (დიდი) სპინების შემთხვევას და მივიღებთ ანალიზურ შედეგებს კვაზიკლასიკური დინამიკისათვის. ქაოსურ რეჟიმში სპინების დინამიკა აღიწერება ფოკერ-პლანკის განტოლებით. ველის პარამეტრები, როდესაც სტოხასტური კონტროლი არის შესაძლებელი, მიღებულია ანალიზური ფორმით და რიცხვითი შედეგებით. ნაჩვენებია, რომ სტოხასტური კონტროლი და დინამიური გაყინვა შესაძლებელია ამ რიცხვითი პარამეტრებისათვის. შემდეგ ჩვენ შევისწავლით სპინურ მძივს სპინების დიდი მაგრამ სასრული რიცხვით და ვაჩვენებთ, რომ ორი სპინის შემთხვევაში გამოყენებული იდეები ამ შემთხვევაშიც მისაღებია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ჩვენ განვიხილავთ სპინური სისტემების მდგომარეობების კონტროლის ალტერნატიულ მეთოდებს. მაშინ, როცა ჩვეულებრივად მიღებულია სპინური სისტემების კონტროლი შესაძლებელია სპინებს შორის ბმის კონტროლით, ჩვენ ვფიქრობთ რომ სტოხასტური კონტროლის მოდელი უფრო ადვილი და ხელსაყრელია. ამ შემთხვევაში სისტემის მდგომარეობების კონტროლი შეიძლება მიღწეულ იქნას გარე მაგნიტური ველის შესაბამისი შერჩევით.



ნახ. 4.1 სპინური სისტემა რომელზეც მოდებულია გარე მუდმივი ( $H_{0,z}$ ) და დროზე დამოკიდებული ველი ( $H_{0,x}$ ).

#### 4.2 არაწრფივი სპინური მძივი გარე ველში

ჩვენ განვიხილავთ  $N$  მაგნიტურ მომენტებს რომლებიც ლოკალიზებულია  $j$  ადგილებში და ერთმანეთთან დაკავშირებულნი არიან გაცვლითი ურთიერთქმედებით,  $J$  ურთიერთქმედების მუდმივით. როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ.4.1, სისტემაზე მოდებულია ორი ველი, მუდმივი მაგნიტური ველი  $H_{0,z}$  მოდებულია  $z$  დერძის გასწვრივ, მაშინ როცა  $x$  დერძის გასწვრივ მოდებული ველი არის დროზე დამოკიდებული. სისტემის ჰამილტონიანი ჩაიწერება შემდეგი ფორმით [95-96]:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{N-1} J \hat{s}_{jz} \hat{s}_{j+1,z} + H_{0x} \sum_{j=1}^N \hat{s}_{jx} + H_{0z} \sum_{j=1}^N \hat{s}_{jz} \quad (4.1)$$

თუ გავითვალისწინებთ მოძრაობის განტოლებებს:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}]; \quad (4.2)$$

და კომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$[s_{i\alpha}, s_{j\beta}] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_{ij} s_{i\gamma} \quad \text{სადაც } i, j = 1 \dots N, \alpha, \beta, \gamma \equiv x, y, z \quad (4.3)$$

მივიღებთ შემდეგ მოძრაობის განტოლებებს:

$$\begin{aligned}\frac{ds_{ix}}{dt} &= -Js_{iy}s_{i+1,z} - Js_{iy}s_{i-1,z} - H_{0z}s_{iy}; \\ \frac{ds_{iy}}{dt} &= Js_{ix}s_{i+1,z} + Js_{ix}s_{i-1,z} + H_{0z}s_{ix} - H_{0x}s_{iz};\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\frac{ds_{iz}}{dt} = H_{0x}s_{iy}, \quad i = 1 \dots N;$$

ჩვენ განვიხილავთ კლასიკურ დინამიკას, რომელიც სრულდება დიდი სპინებისათვის  $s_j$ ,  $\langle \hat{s}_j \rangle = \hbar s_j (s_j + 1)$ . რადგანაც  $[\hat{H}, \hat{s}_i^2] = 0$  ხელსაყრელია სპინები ვანორმირთ ერთზე  $s_i^2 = 1$  და გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე (ნახ.4.1)

$$s_{ix} = s_{i\perp} \cos \varphi_i; \quad s_{iy} = s_{i\perp} \sin \varphi_i; \quad s_{i,z} = \sqrt{1 - s_{i,z}^2}$$

მაშინ (4.4)-დან მივიღებთ მოძრაობის განტოლებებს

$$\begin{aligned}\frac{ds_{iz}}{dt} &= H_{0x}s_{i\perp} \sin \varphi_i, \\ \frac{d\varphi_i}{dt} &= Js_{i-1,z} + Js_{i+1,z} + H_{0z} - H_{0x} \frac{s_{iz}}{s_{i\perp}} \cos \varphi_i, \quad i = 1 \dots N;\end{aligned}\quad (4.5)$$

იმისათვის რომ ვაკონტროლოთ არაწრფივი სპინური დინამიკა ჩვენ გამოვიყენებთ მაგნიტური ველის პერიოდული იმპულსების სერიას  $T$  პერიოდით და  $\varepsilon T$  ამპლიტუდით მოდებულს  $x$  ღერძის გასწვრივ:

$$H_{0x} = \varepsilon T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT);$$

შედგავდ (4.5) მოძრაობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}\dot{s}_{iz} &= -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}, \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_i(s_{i-1,z}; s_{i+1,z}) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial s_{iz}}, \\ \omega_i(s_{i-1,z}; s_{i+1,z}) &= Js_{i-1,z} + Js_{i+1,z} + H_{0z}, \quad i = 1, \dots, N;\end{aligned}\quad (4.6)$$

სადაც:

$$\begin{aligned}V &= \sum_{i=1}^N V_i(s_{iz}, \varphi_i) = \sum_{i=1}^N V_{0i}(s_{iz}, \varphi_i) T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \\ &= \sum_{i=1}^N s_{i\perp} \cos \varphi_i \cdot T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\end{aligned}\quad (4.7)$$

### 4.3 ორი სპინის შემთხვევა.

განვიხილოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევა, ორი სპინის შემთხვევა  $N = 2$ .



ამ შემთხვევაში მოძრაობის განტოლებები  $s_{1z}$  და  $s_{2z}$  კანონიკური ცვლადებისათვის და მისთან კანონიკურად შეუღლებული  $\phi_1$  და  $\phi_2$  კუთხეებისათვის იწერება შემდეგნაირად:

$$\dot{s}_{1z} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \phi_1}, \quad \dot{\phi}_i = \omega_i(s_{jz}) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial s_{iz}}, \quad \omega_i(s_{jz}) = Js_{jz} + H_{0z}, \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (4.8)$$

(4.8) განტოლებებში  $s_{1z}$  და  $s_{2z}$  ცვლადები არიან ადიაბატური ინვარიანტები  $V$  შეშფოთების არარსებობის დროს და ამიტომაც ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ნელი ცვლადები კუთხურ ცვლადებთან შედარებით.

გარკვეულ პირობებში, რომელსაც ქვემოთ დავაკონკრეტებთ სისტემაში შესაძლებელია მოხდეს რეზონანსების გადაფარვა და სისტემაში წარმოიქმნება ქაოსი. ამ დროს ხდება გადასვლა კინეტიკურ აღწერაზე და სპინების განაწილების ფუნქციისათვის  $F(s_{1z}, s_{2z}, t)$  იწერება კინეტიკური განტოლება. კინეტიკური განტოლების გამოყვანა ხდება ზასლავსკის მეთოდით [29-30] და ის ანალაგიურია კინეტიკური განტოლების გამოყვანისა ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის შემთხვევაში, რომელიც განხილული იყო შესავალში.

ამიტომაც მასზე დეტალურად არ შევრჩერდებით. ორი სპინისთვის კინეტიკური განტოლება, ფოკერ-პლანკის განტოლება იწერება შემდეგნაირად [84-85]:

$$\frac{\partial F(s_{1z}, s_{2z}, t)}{\partial t} = D \left( \frac{\partial}{\partial s_{1z}} (1-s_{1z}^2) \frac{\partial F}{\partial s_{1z}} + \frac{\partial}{\partial s_{2z}} (1-s_{2z}^2) \frac{\partial F}{\partial s_{2z}} \right) \quad (4.9)$$

სადაც  $D$  დიფუზიის კოეფიციენტი სრულიად განისაზღვრება იმპულსების

$$\text{პარამეტრებით: } D = \frac{\varepsilon \pi}{2\Omega} = \frac{\varepsilon T}{4} \quad (4.10)$$

აქ მნიშვნელოვანია იმის აღნიშვნა რომ ქაოსი არის ძირითადი პირობა კინეტიკური განტოლების მისაღებად. მეორეს მხრივ ის აგრეთვე არის ეფექტური იარაღი სტოხასტური კონტროლისათვის. რადგანაც სისტემაში ქაოსის წარმოქმნა დაკავშირებულია არაწრფივი რეზონანსების გადაფარვასთან [29-30] და სისტემის პარამეტრების შესაბამისი არჩევით შეგვიძლია ვაკონტროლოთ დიფუზიური პროცესები.

(4.9) განტოლების ამოხსნა წარმოაჩენს სპინების  $s_z$  პროექციების შემთხვევით დინამიკას (ქაოსურ რეჟიმში). შემთხვევითობა აქ გამოწვეულია იმპულსების პერიოდული სერიის მოქმედებით. თუ გვაკეთებთ ჩასმას  $F(s_{1z}, s_{2z}) = F_1(s_{1z}) F_2(s_{2z})$

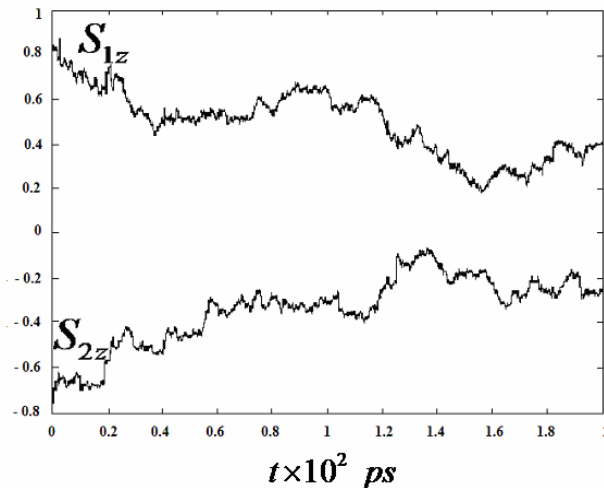
(4.9) განტოლებაში მივიღებთ რომ სპინის  $s_{jz}$  პროექციების საშუალო მნიშვნელობებისათვის მოძრაობა დიფუზიურია:

$$\frac{d}{dt} \bar{s}_{jz} = \int_{-1}^{+1} s_{jz} \frac{\partial F_j}{\partial t} ds_{jz} = D \int_{-1}^{+1} s_{1z} \frac{\partial}{\partial s_{jz}} \left( (1-s_{jz}^2) \frac{\partial F_j(s_{jz})}{\partial s_{jz}} \right) = -2D \bar{s}_{jz}; \quad j=1, 2 \quad (4.11)$$

$$\bar{s}_{1,2z} = s_{1,2z}(0) e^{-2Dt} \quad (4.12)$$

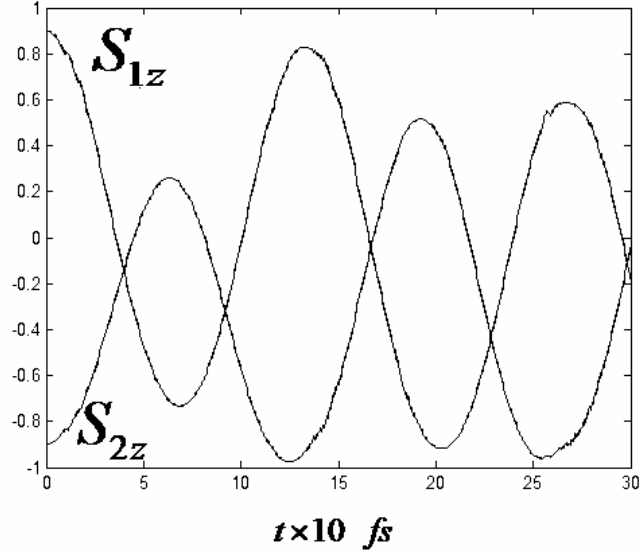
თუ მოვდებთ იმპულსებს საწყის ანტიფერომაგნიტურ მდგომარეობას  $s_{1z}(0) \approx 1$ ,  $s_{2z}(0) \approx -1$  მაშინ ისინი დიფუზიურად გადაერთვებიან  $s_{1z} \rightarrow 0$  და  $s_{2z} \rightarrow 0$  მდგომარეობაში და ეფექტურად რჩებიან ამ მდგომარეობაში. გადართვის დრო ტოლია  $1/D$ -სი. (4.12)-დან შეიძლება დავასკვნათ, რომ სპინის  $z$  მდგენელი ქრება  $t > 1/D$  დროის შემდეგ. მხოლოდ აქვე უნდა შევნიშნოთ რომ რეზონანსების

გადაფარვის ეფექტი დამყარებულია იმაზე, რომ სისშირე დამოკიდებულია  $s_z$ -ზე  $\omega = \omega(s_z)$ .  $s_z$  კომპონენტის განულება იძლევა იმას რომ ამ შემთხვევაში  $\omega$  აღარ არის დამოკიდებული  $s_z$  და ამ შემთხვევაში აღარ გვაქვს რეზონანსების გადაფარვა, ამიტომ უნდა მოველოდეთ რომ სპინების  $s_z$  კომპონენტის განულება არ ხდება სრულად, არამედ სპინები გადაიხრებიან საწყისი მდებარეობიდან რაღაც კუთხით და ხდება  $s_z$  კომპონენტის დროში გაჯერება (ნახ.4.2). სტოხასტური გადართვა ანუ  $s_z$  კომპონენტის განულება მიუღწეველია რეზონანსული ველების შემთხვევაში, სისტემის არაწრფივი დინამიკის გამო:  $j$ -ური სპინის პრეცესიის სისშირე  $\omega_j(s_{iz}) = Js_{iz} + H_{0z}$  დამოკიდებულია  $s_i$  სპინის დინამიკაზე(4.8) განტოლებები). თუ გამოვიყენებთ რეზონანსულ ველს სისშირით  $\omega_0 = \omega_j(s_{iz}(t=0))$  სპინის ორიენტაცია შეიცვლება მხოლოდ უმნიშვნელოდ  $\omega_j^{-1}$  დროის შემდეგ გარე ველი ხდება არარეზონანსული ვინაიდან  $s_z(t > 0) \neq s_z(0)$ .



ნახ. 4.2  $s_{1z}$  და  $s_{2z}$  დროში ევოლუცია იმ შემთხვევაში, როცა  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.057$ ,  $\Omega = 100$ ,  $\frac{\tau_0}{T} = 0.1$ ,  $s_{1z}(0) = 0.8$ ,  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $s_{2z}(0) = -0.8$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ ,  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  და  $K_0 = K' = 0.45 \cdot 10^{-4}$ .

როგორც ნახ. 4.2-დან ჩანს, თუ საწყის მდგომარეობებს ავიღებთ 0.8 და -0.8-ს, იმპულსების მოქმედების შემდეგ დიდი დროის განმავლობაში (40-200 ps) სპინის  $z$  კომპონენტების მნიშვნელობები რჩებიან 0.4 და -0.4 მნიშვნელობებთან ახლოს ვიწრო ინტერვალში. რა თქმა უნდა სპინების კონტროლი ამ შემთხვევაში არ არის სრულყოფილი. ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ ძალიან ძლიერი იმპულსების სერია, მაგრამ ამ დროს სტოხასტური კონტროლი სრულიად შეუძლებელი იქნება. (ნახ.4.3). როგორც ნახ.4.3-დან ჩანს, ძლიერი იმპულსების გამოყენებისას შესაძლებელია სპინების მიმართულების ცვლილება, მაგრამ სპინების  $z$  კომპონენტები მცირე დროით ინტერვალში (ნახ. 4.2-ზე წარმოდგენილ დროით მასშტაბთან შედარებით), ასრულებენ ოსცილაციების დიდ რიცხვს, უფრო დიდი ამპლიტუდით ვიდრე კონტროლის ზონის სიგანეა ნახ. 4.2-ზე.



ნახ.4.3  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $H_{0x} = \varepsilon = 2$ ,  $\Omega = 100$ ,  $\frac{\tau_0}{T} = 0.1$ ,  $s_{1z}(0) = 0.9$ ,  $\varphi_1(0) = 0$ ,

$s_{2z}(0) = -0.9$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ .

#### 4.4 კლასიკური ასახვები.

ამგვარად, ორი სპინის შემთხვევაში სპინების დინამიკის ქაოსურობას მივყავართ სპინების სტოხასტურ გადართვასთან, რომელიც აღიწერება (4.9)-(4.12) განტოლებებით. ამიტომ მნიშვნელოვანია იმის აღგენა თუ რა შემთხვევაშია ეს განტოლებები სამართლიანი. ამისათვის (4.6) განტოლებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\dot{s}_{iz} = -\varepsilon \frac{\partial V_{0i}}{\partial \varphi_i} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT), \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i(s_{iz}) + \varepsilon \frac{\partial V_{0i}}{\partial s_{iz}} T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT); \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (4.13)$$

დაეუშვათ პირველი იმპულსი ჩაირთოს  $t = t_0$  მომენტში. შემოვიტანოთ  $\hat{T}$  ევოლუციის ოპერატორი, რომელიც აღწერს სისტემის ევოლუციას  $T$  პერიოდის განმავლობაში:  $\hat{T} = \hat{T}_\tau \hat{T}_f$ . სადაც  $\hat{T}_\tau$  აღწერს სისტემის ევოლუციას იმპულსების მოქმედების დროს, ხოლო  $\hat{T}_f$  აღწერს სისტემის ევოლუციას იმპულსებს შორის.

თუ სისტემის მდგომარეობას ავნიშნავთ  $(s_{1z}, \varphi_1, s_{2z}, \varphi_2)$ , მაშინ (4.13)-დან  $\hat{T}_f(s_{1z}, \varphi_1, s_{2z}, \varphi_2) = (s_{1z}, \varphi_1 + \omega_1(s_{2z})T, s_{2z}, \varphi_2 + \omega_2(s_{1z})T)$ .

$\hat{T}_\tau$  ოპერატორის ზუსტ ფორმას ვიპოვიოთ, თუ გავაინტეგრებთ (4.13) განტოლებათა სისტემას  $t_0$  დროის მომენტთან ახლოს მცირე  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$  შუალედში ( $\tau \ll \omega_{i,j}^{-1}$ ). შედეგად მივიღებთ ასახვებს რომელიც სპინების მდგომარეობას  $n+1$  იმპულსის მოქმედების შემდეგ უკავშირებს სპინების მდგომარეობასთან იმპულსის მოქმედებამდე:

$$\begin{aligned} s_{iz,n+1} &= s_{iz,n} + \varepsilon T \sqrt{1 - s_{iz,n}^2} \sin \varphi_{i,n}, \\ \varphi_{i,n+1} &= \varphi_{i,n} + (Js_{jz,n+1} - H_{0z})T - \varepsilon T \frac{s_{iz,n}}{\sqrt{1 - s_{iz,n}^2}} \cos \varphi_{i,n} \end{aligned} \quad (4.14)$$

ორიენტირი, რომლის დროსაც მოხდება სპინების სტოხასტური გადართვა არის ველის პარამეტრების ისე შერჩევა, რომ სისტემაში გვქნონდეს ქაოსური დინამიკა.

ჩვენ შეგვიძლია სისტემაში ქაოსის არსებობის შესახებ დასკვნა გავაკეთოთ, თუ გამოვიკვლევთ სისტემის ფაზური ტრაექტორიების სტაბილურობას (4.14)-ის იაკობიანის საშუალებით [28-30]. რომლის ანალიზი საფუძველს გვაძლევს დავასკვნათ რომ სისტემაში ქაოსი შესაძლებელია მაშინ როდესაც:

$$|\lambda_i| > 1, K > 0 \quad (4.15).$$

სადაც  $\lambda_i$  (4.14) სისტემის იაკობიანის საკუთარი მნიშვნელობებია:

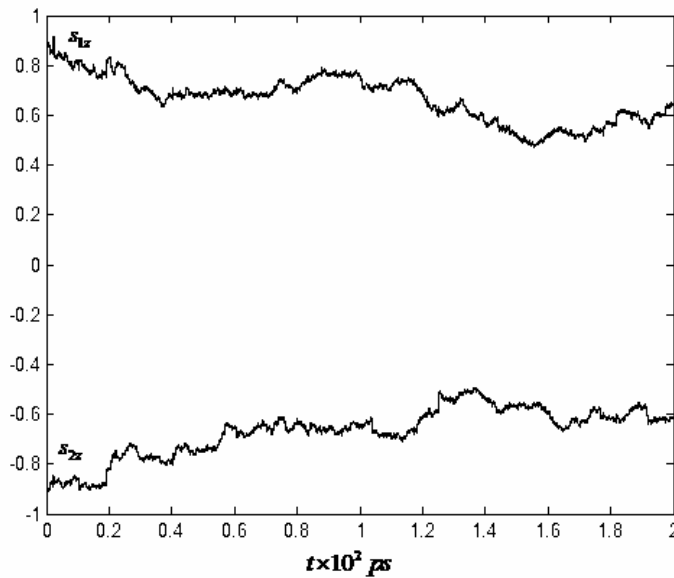
$$\lambda_{1,2} = \frac{(2+K) \pm \sqrt{(K+2)^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{(2-K) \pm \sqrt{(K-2)^2 - 4}}{2};$$

$$K = K_0 \sqrt{s_{1\perp} s_{2\perp} < \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 >_t}, \quad K_0 = \varepsilon T^2 J \quad (4.16)$$

სადაც  $< \dots >_t$  აღნიშნავს დროით გასაშუალებას. როგორც (4.16) ფორმულებიდან ჩანს სისტემის დინამიკა დამოკიდებულია გარე ველის პარამეტრებზე და სპინების შორის გაცვლითი ურთიერთქმედების  $J$  პარამეტრზე.

#### 4.5 რიცხვითი შედეგები

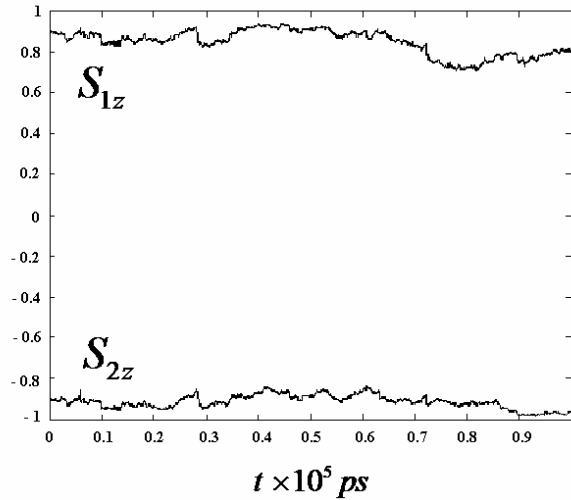
(4.13) მოძრაობის განტოლებების რიცხვით ამონახსნებით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ (4.15) პირობებს მართლაც მიყვავართ ქაოსურ დინამიკამდე და სპინების სტოხასტურ გადახრამდე, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ.4.2. გარე ველის პარამეტრები ისეა შერჩეული რომ  $K_0 = K' = 0.45 \times 10^{-4} > 0$  და როგორც ნახაზზე ვხედავთ, სპინები გადახრილია საწყისი მიმართულებიდან. შემდეგ ისინი რჩებიან ამ გადახრილ მდგომარეობაში საკმაოდ დიდი დროის განმავლობაში, რაც ეთანხმება ზემოთ მოყვანილ ანალიზს. თუ გარე ველს ისე შევცვლით, რომ  $K_0 < K'$  ( $K_0$  ეფექტურად ნულია), მაშინ სპინების საგრძნობი გადახრა არ გვექნება (ნახ.4.4)



ნახ.4.4 იგივე სიდიდეები რაც ნახ.4.2 მხოლოდ  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.04$ ,  $\Omega = 100$ ,  $\frac{\tau_0}{T} = 0.1$ ,  $s_{1z}(0) = 0.9$ ,  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $s_{2z}(0) = -0.9$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ ,  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ , და  $K_0 = 0.32 \times 10^{-4} < K'$ .

სისტემის დინამიკა არის ძალიან მგრძობიარე სისტემის პარამეტრების მცირე ცვლილებების მიმართ. თუ ავიღებთ ძალიან ძლიერ ველებს ( $\varepsilon T \gg J, H_{0z} \gg J s_z$ ), სისტემის დინამიკა ხდება რეგულარული, მაგრამ არაინტეგრებადი. ასე რომ

სტოხასტური გადართვა და დინამიური ჩაჭერა არ მოხდება ე.ი.  $s_{1,2,z}$  რჩება ადიაბატურად ინვარიანტული და გარე ველების გავლენით განიცდის მცირე ფლუქტუაციებს საწყისი მდგომარეობის მიმართ. (ნახ.4.5).



ნახ.4.5 იგივე სიდიდეები, რაც ნახ.4.2-ზე მხოლოდ  $J=0$ ,  $H_{0z}=0.2$ ,  $\varepsilon=0.04$ ,  $\Omega=100$ ,  $\frac{\tau_0}{T}=0.1$ ,  $s_{1z}(0)=0.8$ ,  $\varphi_1(0)=0$ ,  $s_{2z}(0)=-0.8$ ,  $\varphi_2(0)=0$ ,  $T=\frac{2\pi}{\Omega}$ , და  $K_0=0$ .

#### 4.6 სასრული სპინური მძივი

არის თუ არა შესაძლებელი ვაკონტროლოთ განსაზღვრული სპინების მიმართულება ურთიერთქმედ სპინების მძივში.

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემათ განვიხილოთ მოძრაობის (4.6) განტოლებები და დაუშვათ რომ მხოლოდ  $(k, k+1)$  სპინებზე მოქმედებენ იმპულსები, მაშინ:

$$\frac{ds_{iz}}{dt} = -(\delta_{i,k} + \delta_{i,k+1})\varepsilon \frac{\partial V_i(\varphi_i, s_{iz})}{\partial \varphi_i};$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i(s_{i-1z}, s_{i+1z}) + (\delta_{i,k} + \delta_{i,k+1})\varepsilon \frac{\partial V_i(\varphi_i, s_{iz})}{\partial s_{iz}} \quad (4.17)$$

$$\omega_i(s_{i-1z}, s_{i+1z}) = Js_{i-1z} + Js_{i+1z} + H_{0z}, \quad i=1, \dots, N, \quad N+1 \equiv 1$$

როგორც (4.17) განტოლებებიდან ჩანს  $s_{iz}(t) = const$  თუ  $k \neq i \neq k+1$ . სპინებს შორის ურთიერთქმედების გავლენა შემოდის  $\dot{\varphi}(s_{i-1z}, s_{i+1z})$  ფაზების საშუალებით. სპინების გასწვრივი მდგენელების ოსცილაციის სიხშირე  $\dot{\varphi}_i$ ,  $i=1..N$  დაკავშირებულია ეფექტურ მაგნიტურ ველთან შემდეგნაირად:

$$\dot{\varphi}_i(t) = \omega_i^{eff} = \gamma_s H_i^{eff} \quad (4.18)$$

სადაც

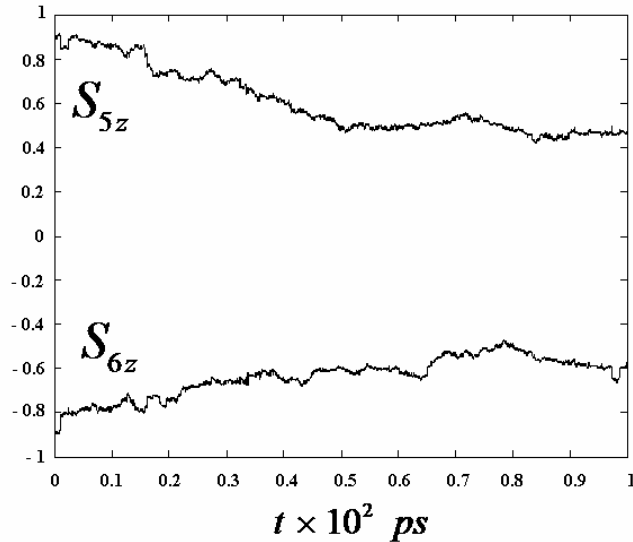
$$H_i^{eff}(t) = \frac{1}{\gamma_s} \left[ H_0 + J(s_{i-1z} + s_{i+1z}) - (\delta_{i,k} + \delta_{i,k+1}) \frac{H_{0x}(t)}{s_{i\perp}} \cos(\varphi_i) s_{i,z} \right]$$

როგორც (4.18) გამოსახულებიდან ჩანს სპინები რომლებზეც მოქმედებენ იმპულსები ცვლიან ენერგიას თავიანთ უახლოეს მეზობლებთან. უახლოესი

მეზობლები შთანთქავენ ენერგიას სპინებისაგან, რომელზედაც იმპულსები მოქმედებს, მიუხედავად იმისა, რომ მათი  $z$  მდგენელი რჩება მუდმივი.

ეს პროცესი დამოკიდებულია სპინების  $z$  კომპონენტზე და  $\omega_i^{eff}$  ეფექტურ სისწირეზე.

ეს მოვლენა დემონსტრირებულია ნახ.4.6-ზე.

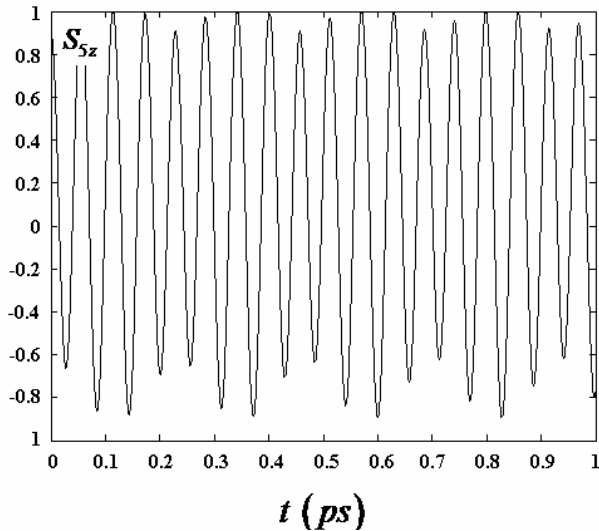


ნახ. 4.6  $s_{5z}$  და  $s_{6z}$  სპინური კომპონენტების დინამიკა 10 სპინისაგან შემდგარი ურთიერთქმედ სპინურ მძივში. სურათი მიღებულია (4.17) განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებით პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:

$$J = 0.2, H_{0z} = 0.2, \varepsilon = 0.04, \Omega = 100, \frac{\tau_0}{T} = 0.1, s_{2n+1}^z(0) = 0.9, s_{2n}^z(0) = -0.9,$$

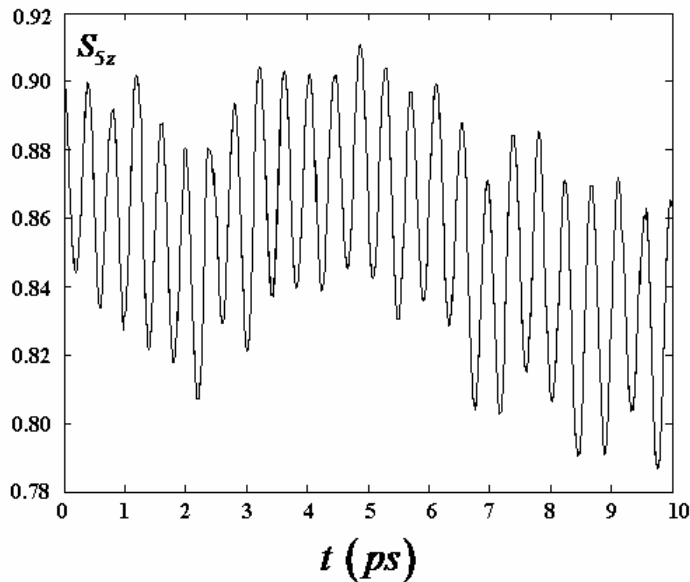
$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, i = \overline{1, N}, N = 10.$$

ისმის კითხვა, შეგვიძლია თუ არა ვაკონტროლოთ სპინების გადახრის პროცესი, თუ მოვდებთ მუდმივ მაგნიტურ ველს  $x$  ღერძის გასწვრივ? სისტემის დინამიკა არის ქაოსური, პერიოდული იმპულსების სერიის გარეშე [95-96]. მაგრამ ამ დროს სპინების  $z$  კომპონენტა არ არის ადიაბატური ინვარიანტი და დინამიური გაყინვის მექანიზმი, რომელიც ზემოთ იყო განხილული არ მუშაობს.



ნახ. 4.7 მეხუთე სპინის  $z$  კომპონენტის დროზე დამოკიდებულება პარამეტრების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის:  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $H_{0x} = 1$ ,  $S_{2n+1}^z(0) = 0.9$ ,  $S_{2n}^z(0) = -0.9$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$  და  $N = 10$ .

ნახ 4.7 ნახვენებია რომ თუ თუ მაგნიტური ველის ამპლიტუდა რომელიც მოდებულია  $x$  ღერძის გასწვრივ არის საკმაოდ დიდი  $H_{0x} > H_{0z}$ , მაშინ სპინების  $z$  კომპონენტი ასრულებს სწრაფ ოსცილაციებს. მეორე ზღვრულ შემთხვევაში  $H_{0x} < H_{0z}$  სპინების ორიენტაცია შეგვიძლია შევცვალოთ მაგრამ დინამიური ჩატერის მექანიზმი ამ შემთხვევაშიც შეუძლებელია. (ნახ. 4.8).



ნახ. 4.8 იგივე, რაც ნახ.4.7-ზე, მხოლოდ პარამეტრები შეცვლილია შემდეგნაირად:  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $H_{0x} = 0.01$ ,  $S_{2n+1}^z(0) = 0.9$ ,  $S_{2n}^z = -0.9$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$  და  $N = 10$ .

დავუშვათ სპინებზე ვიმოქმედეთ იმპულსების სერიით და რაღაც დროის შემდეგ გამოვრთეთ ეს იმპულსები. მაშინ სპინები დინამიურად ჩატერილნი იქნებიან იმ მდგომარეობაში რა მდგომარეობაში ისინი არიან იმპულსების გამორთვის წინ .

ამოსავალი წერტილი აქ ის არის რომ როდესაც არა გვაქვს გარე ველის იმპულსები, სპინების  $s_z$  მდგენელი არის მოძრაობის ინტეგრალი. განტოლებათა სისტემა რომელიც ამ შემთხვევაში აღწერს სპინების დინამიკას არის:

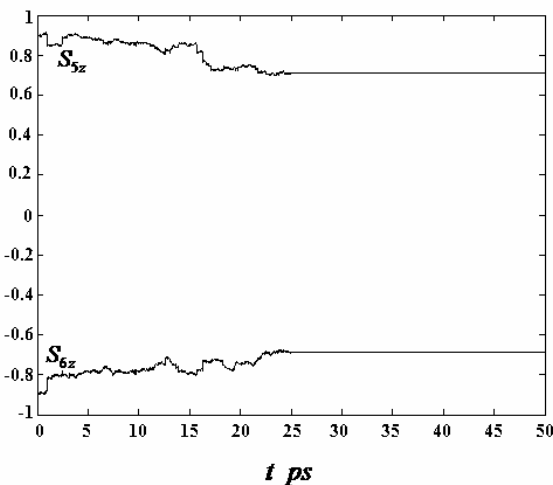
$$\begin{aligned} \frac{ds_{jx}}{dt} &= -J(s_{j-1,z} + s_{j+1,z})s_{jy} - H_{0z}s_{jy}, \\ \frac{ds_{jy}}{dt} &= J(s_{j-1,z} + s_{j+1,z})s_{jx} + H_{0z}s_{jx}, \\ \frac{ds_{jz}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19)-ის ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} s_{jx} &= s_{jx}(t_0)\cos(\omega_{j0}t + \varphi_0), \\ s_{jy} &= s_{jy}(t_0)\cos(\omega_{j0}t + \varphi_0), \\ s_{jz} &= s_{jz}(t_0) \end{aligned}$$

სადაც  $\omega_j(s_{j-1z}(0); s_{j+1z}(0)) = J(s_{j-1z}(0) + s_{j+1z}(0)) + H_{0z} = \omega_{j0}$  და  $s_{jz}(t_0)$  შეესაბამება სპინების იმ ორიენტაციას, რომელიც მიიღწევა იმპულსების მოქმედების შემდეგ  $0 < t < t_0$  დროით ინტერვალში.

შედეგი შეიძლება შემოწმდეს (4.6) მოძრაობის განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით. ნახ.4.9.



**ნახ. 4.9** ნახაზი მიღებულია (4.6) განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ინტეგრირებით, როცა  $J = 0.2$ ,  $H_{0z} = 0.2$ ,  $H_{0x} = 0.01$ ,  $s_{2n+1}^z(0) = 0.9$ ,  $s_{2n}^z(0) = -0.9$ ,  $\varphi_i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 10$ .

#### 4.7 დასკვნა

ამრიგად ამ თავში ჩვენ შევისწავლეთ დინამიური გადართვის შესაძლებლობა სპინურ ჯაჭვში როდესაც სპინებს შორის გვაქვს გაცვლითი ურთიერთქმედება და მასზე მოქმედებს ცვლადი და მუდმივი მაგნიტური ველები. ანალიზური და რიცხვითი გამოთვლებით ვაჩვენეთ რომ სტოქასტური გადახრა მაშინ არის შესაძლებელი, თუ სისტემის პარამეტრებს ისე შევარჩევთ, რომ სპინების კლასიკური დინამიკა იყოს ქაოსური. გადახრის დრო დამოკიდებულია გარე ველის პარამეტრებზე. ჩვენ აგრეთვე შევისწავლეთ დინამიური გაყინვის შესაძლებლობა, ესე იგი საბოლოო მდგომარეობის სტაბილიზაცია სპინების გადახრის დროის შემდეგ.

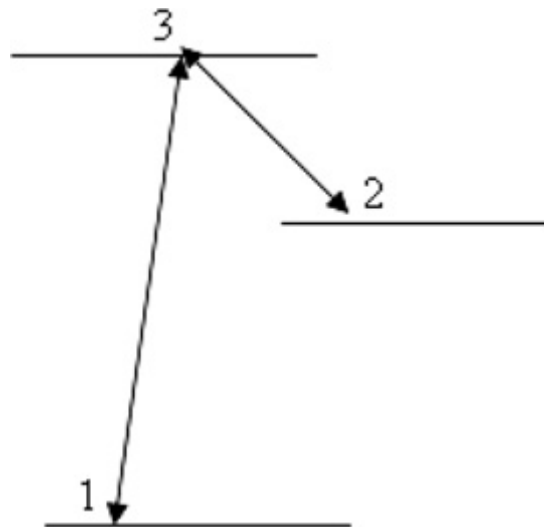


## 5. თავი ქაოსი განზოგადებულ ჯეიმს კომინგსის მოდელში [97]

### 5.1 შესავალი

რეზონატორების კვანტური ელექტროდინამიკა დღესდღეისობით წარმოადგენს ფიზიკის ერთ-ერთ სწრაფად განვითარებად დარგს რომელიც სწავლობს ატომების ურთიერთქმედებას ფოტონებთან მაღალი სიზუსტის რეზონატორებში, ელექტრომაგნიტური გამოსხივების ფართო სპექტრში მიკროტალღებიდან ხილულ სინათლემდე [99-106]. ინტერესი ასეთი სისტემების მიმართ გამოწვეულია რამდენიმე მიზეზით: ერთ-ერთი მათგანია შესაძლებლობა იმისა რომ უფრო ღრმად შევისწავლოთ ღია სისტემების დინამიკა. სხვა არგუმენტი ასეთი სისტემების გამოყენება კვანტური გამოთვლების საქმეში [87-90,102].

ჯეიმს-კომინგსის მოდელი წარმოადგენს ერთ-ერთ საბაზისო მოდელს რეზონატორების კვანტური ელექტროდინამიკის შესწავლისას. კერძოდ, ეს მოდელი აღწერს ორდონიანი ატომის რეზონატორის გამოსხივების ერთ მოდასთან ურთიერთქმედებას [87-90,102]. ამ მოდელის განზოგადებას წარმოადგენს სამდონიანი ატომის განხილვა რომელიც ურთიერთქმედებს რეზონატორის გამოსხივების ორ მოდასთან.



ნახ 5.1 ატომური დონეების და დონეებს შორის გადასვლების სქემატური წარმოდგენა განზოგადებულ ჯეიმს-კომინგსის მოდელში.

განზოგადებული ჯეიმს კომინგსის მოდელი დეტალურად განხილულია [107-109] შრომებში.

განვიხილოთ ჰამილტონიანი რომელიც აღწერს სამდონიანი ატომის ურთიერთქმედებას ელექტრომაგნიტურ ველთან რეზონატორში. ეს ჰამილტონიანი შეიცავს არა მარტო ატომის ურთიერთქმედებას ელექტრომაგნიტურ ველთან, არამედ კინემატიკურ წევრსაც რომელიც ახასიათებს ატომის, როგორც მთლიანის მოძრაობას. დავუშვათ რომ დასაშვებია გადასვლები 1-სა და 3 და 2 და 3 დონეებს შორის (ნახ. 5.1).

ჩვენ განვიხილავთ ყველაზე ზოგად შემთხვევას, როდესაც ატომის ველთან ურთიერთქმედება დამოკიდებულია ატომის მდებარეობაზე რეზონატორის შიგნით.

მაშინ შესაბამისი ჰამილტონიანი ჩაიწერება ასე [107-109]:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \sum_{\alpha=1}^2 \hbar \omega_{\alpha} \hat{b}_{\alpha}^+ \hat{b}_{\alpha} + \sum_{j=1}^3 E_j \hat{R}_{jj} + \hbar \sum_{\alpha=1}^2 g_{\alpha} (\hat{b}_{\alpha} \hat{R}_{3\alpha} + \hat{b}_{\alpha}^+ \hat{R}_{\alpha 3}) \cos k_{f\alpha} \hat{x} \quad (5.1)$$

აქ  $\hat{x}$  და  $\hat{p}$  ატომის მდებარეობის და იმპულსის ოპერატორია,  $E_j$  შესაბამისი დონის ენერჯიაა,  $\omega_{\alpha}$  და  $k_{f\alpha}$  გამოსხივების ველის სიხშირე და ტალღური ვექტორია,  $g_{\alpha}$  ატომისა და გამოსხივების ველის ბმის მუდმივას ამპლიტუდაა.  $\hat{b}_{\alpha}^+$  და  $\hat{b}_{\alpha}$  ფოტონების დაბადების და გაქრობის ოპერატორია,  $\hat{R}_{3\alpha}$  და  $\hat{R}_{\alpha 3}$ ,  $\alpha=1,2$  დონეებს შორის გადასვლის ოპერატორებია.  $\hat{R}_{jj}$   $j$  მდებარეობის დასახლების

ოპერატორია, რომელიც აკმაყოფილებს სისრულის პირობას  $\sum_{j=1}^3 R_{jj} = 1$ .

დავუშვათ საბაზისო ატომური მდგომარეობები არის:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

ეს მდგომარეობები დაკავშირებული არიან  $U(3)$  ჯგუფის გენერატორებთან შემდეგნაირად [109]:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{R}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\hat{R}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{R}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

მაგალითად  $\hat{R}_{11}|a_1\rangle = |a_1\rangle$ ,  $\hat{R}_{11}|a_2\rangle = 0$ ,  $\hat{R}_{11}|a_3\rangle = 0$ ,  $\hat{R}_{21}|a_1\rangle = |a_2\rangle$ , და ასე შემდეგ.

ეს ოპერატორები აკმაყოფილებენ შემდეგ ალგებრას:

$$R_{ij} R_{kl} = R_{il} \delta_{kj}. \quad (5.4)$$

ფოტონების დაბადების და გაქრობის ოპერატორები აკმაყოფილებენ შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს [110]:

$$[\hat{b}_{\alpha}, \hat{b}_{\alpha}^+] = 1 \quad (5.5)$$

და ახასიათებენ ელექტრომაგნიტური ტალღის არჩეულ მოდას, რომელსაც აქვს  $\omega_{\alpha}$  სიხშირე და  $k_{f\alpha}$  ტალღური ვექტორი.

(5.1) ჰამილტონიანი არის არაწრფივი და არაინტეგრებადი ამიტომაც შეიძლება ჰქონდეს ქაოსური ყოფაქცევა. როგორც შესაბამისი ორდონიანი ჯეიმს კომინგსის მოდელი რომელიც განხილული იყო და შესწავლილი [111], აქაც დინამიკა ძირითადად დამოკიდებულია შიდა გადასვლების სიხშირეებსა

$$\omega_{13} = \frac{E_3 - E_1}{\hbar}, \quad \omega_{23} = \frac{E_3 - E_2}{\hbar} \quad \text{და გამოსხივების ველის სიხშირეებს შორის}$$

$$\text{სხვაობაზე } \delta_\alpha = \omega_\alpha - (E_3 - E_\alpha)/\hbar, \quad \alpha = 1, 2.$$

[111] შრომაში ნახვენებია, რომ ორდონიან ჯეიმს-კომინგსის მოდელში, რეზონანსულ შემთხვევაში, როდესაც რეზონატორის გამოსხივების სიხშირე ემთხვევა ატომშიდა გადასვლების სიხშირეს სისტემა არის ინტეგრებადი, ხოლო არარეზონანსულ შემთხვევაში სისტემაში შესაძლებელი იყო ქაოსი. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ განზოგადებული ჯეიმს-კომინგსის მოდელი. როგორც ქვემოთ იქნება ნახვენები განსხვავებით ჩვეულებრივი ჯეიმს-კომინგსის მოდელისა ქაოსი ამ შემთხვევაში შესაძლებელია რეზონანსულ შემთხვევაშიც  $\delta_\alpha = 0, \alpha = 1, 2$ .

მოძრაობის ჰეიზენბერგის განტოლებები ოპერატორებისათვის (5.1)

ჰამილტონიანის გამოყენებით რეზონანსულ შემთხვევაში შემდეგნაირად დაიწერება:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m},$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \hbar \sum_{\alpha=1}^2 g_\alpha (\hat{b}_\alpha \hat{R}_{3\alpha} + \hat{b}_\alpha^+ \hat{R}_{\alpha 3}) k_{f\alpha} \sin k_{f\alpha} \hat{x},$$

$$\frac{d\hat{R}_{13}}{dt} = ig_1 \hat{b}_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) (\hat{R}_{33} - \hat{R}_{11}) - ig_2 b_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) \hat{R}_{12},$$

$$\frac{d\hat{R}_{31}}{dt} = ig_1 \hat{b}_1^+ \cos(k_{f1} \hat{x}) (\hat{R}_{11} - \hat{R}_{33}) + ig_2 b_2^+ \cos(k_{f2} \hat{x}) \hat{R}_{21},$$

$$\frac{d\hat{R}_{23}}{dt} = ig_2 \hat{b}_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) (\hat{R}_{33} - \hat{R}_{22}) - ig_1 b_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) \hat{R}_{21}, \quad (5.6)$$

$$\frac{d\hat{R}_{32}}{dt} = ig_2 \hat{b}_2^+ \cos(k_{f1} \hat{x}) (\hat{R}_{22} - \hat{R}_{33}) + ig_1 b_1^+ \cos(k_{f1} \hat{x}) \hat{R}_{12},$$

$$\frac{d\hat{R}_{11}}{dt} = ig_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) (\hat{b}_1 \hat{R}_{31} - \hat{b}_1^+ \hat{R}_{13}),$$

$$\frac{d\hat{R}_{22}}{dt} = ig_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) (\hat{b}_2 \hat{R}_{32} - \hat{b}_2^+ \hat{R}_{23}),$$

$$\frac{d\hat{R}_{33}}{dt} = -ig_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) (\hat{b}_1 \hat{R}_{31} - \hat{b}_1^+ \hat{R}_{13}) + ig_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) (\hat{b}_2 \hat{R}_{23} - \hat{b}_2^+ \hat{R}_{32}),$$

$$\frac{d\hat{b}_1}{dt} = -ig_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) \hat{R}_{13}, \quad \frac{d\hat{b}_1^+}{dt} = ig_1 \cos(k_{f1} \hat{x}) \hat{R}_{31}, \quad \frac{d\hat{b}_2}{dt} = ig_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) \hat{R}_{32},$$

$$\frac{d\hat{b}_2}{dt} = -ig_2 \cos(k_{f2} \hat{x}) \hat{R}_{23},$$

$$\frac{d\hat{R}_{12}}{dt} = ig_1 \hat{b}_1 \hat{R}_{32} \cos(k_{f1} \hat{x}) - ig_2 \hat{b}_2^+ \hat{R}_{13} \cos(k_{f2} \hat{x}),$$

$$\frac{d\hat{R}_{21}}{dt} = ig_2 \hat{b}_2 \hat{R}_{31} \cos(k_{f2} \hat{x}) - ig_1 \hat{b}_1^+ \hat{R}_{23} \cos(k_{f1} \hat{x}).$$

(5.6) სისტემიდან ადვილია ჩვენება  $\frac{d}{dt}(\hat{R}_{11} + \hat{R}_{22} + \hat{R}_{33}) = 0$ , რაც გამოსახავს

$$\text{ნაწილაკთა რიცხვის შენახვას } \hat{R}_{11} + \hat{R}_{22} + \hat{R}_{33} = 1.$$

შემოვიღოთ შემდეგი ოპერატორები:

$$\hat{A}_1 = i(\hat{b}_1 \hat{R}_{31} - \hat{b}_1^+ R_{13}), \quad \hat{A}_2 = i(\hat{b}_2 \hat{R}_{32} - \hat{b}_2^+ R_{23}), \quad \hat{U}_1 = (\hat{b}_1 \hat{R}_{31} + \hat{b}_1^+ R_{13}), \quad \hat{U}_2 = (\hat{b}_2 \hat{R}_{32} + \hat{b}_2^+ R_{23}), \quad (5.7)$$

$$\hat{B} = \hat{b}_1 \hat{b}_2^+ \hat{R}_{21} + \hat{b}_1^+ \hat{b}_2 \hat{R}_{12}, \quad \hat{C} = i(\hat{b}_1 \hat{b}_2^+ \hat{R}_{21} - \hat{b}_1^+ \hat{b}_2 R_{12}),$$

$$\hat{N}_1 = \hat{b}_1^+ \hat{b}_1, \quad \hat{N}_2 = \hat{b}_2^+ \hat{b}_2.$$

მაშინ (5.6) სისტემიდან

$$\frac{d\hat{R}_{11}}{dt} = ig_1 \cos(k_{f_1} \hat{x}) \hat{A}_1, \quad (5.8)$$

$$\frac{d\hat{R}_{22}}{dt} = ig_2 \cos(k_{f_2} \hat{x}) \hat{A}_2.$$

ხოლო

$$\frac{d\hat{N}_1}{dt} = g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x}) \hat{A}_1, \quad (5.9)$$

$$\frac{d\hat{N}_2}{dt} = g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x}) \hat{A}_2.$$

აქედან ჩანს რომ ინახება შემდეგი სიდიდეები:

$$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 - \hat{R}_{11} = const, \quad (5.10)$$

$$\hat{M}_2 = \hat{N}_2 - \hat{R}_{22} = const.$$

ჩვენ შეგვიძლია (5.10) შენახვადი სიდიდეებსა და  $\hat{R}_{11} + \hat{R}_{22} + \hat{R}_{33} = 1$  პირობის გამოყენებით დავწეროთ მოძრაობის განტოლებები  $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{U}_1, \hat{U}_2, \hat{B}$ , და  $\hat{C}$  ოპერატორებისთვის რომლებსაც აქვთ შემდეგი სახე:

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = 2g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x})(M_1 + 1)(1 - 2\hat{R}_{11}(t) - \hat{R}_{22}(t)) - g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x}) \hat{B}(t),$$

$$\frac{d\hat{A}_2(t)}{dt} = 2g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x})(M_2 + 1)(1 - \hat{R}_{11}(t) - 2\hat{R}_{22}(t)) - g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x}) \hat{B}(t),$$

$$\frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} = g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x}) \hat{C}(t),$$

$$\frac{d\hat{U}_2(t)}{dt} = -g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x}) \hat{C}(t), \quad (5.11)$$

$$\frac{d\hat{B}(t)}{dt} = g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x})(\hat{M}_1 + 1)\hat{A}_2(t) + g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x})(\hat{M}_2 + 1)\hat{A}_1(t),$$

$$\frac{d\hat{C}(t)}{dt} = g_1 \cos(k_{f_1} \hat{x})(\hat{M}_1 + 1)\hat{U}_2(t) - g_2 \cos(k_{f_2} \hat{x})(\hat{M}_2 + 1)\hat{U}_1(t).$$

საბოლოო ჯამში მოძრაობის განტოლებებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m},$$

$$\frac{d\hat{p}}{dt} = \hbar \sum_{\alpha=1}^2 g_{\alpha} (\hat{b}_{\alpha} \hat{R}_{3\alpha} + \hat{b}_{\alpha}^+ \hat{R}_{\alpha 3}) k_{f\alpha} \sin k_{f\alpha} \hat{x},$$

$$\frac{d\hat{R}_{11}}{dt} = ig_1 \cos(k_{f_1} \hat{x}) \hat{A}_1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{R}_{22}}{dt} &= ig_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})\hat{A}_2, \quad \frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = 2g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})(M_1+1)(1-2\hat{R}_{11}(t)-\hat{R}_{22}(t)) - g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})\hat{B}(t), \\
\frac{d\hat{A}_2(t)}{dt} &= 2g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})(M_2+1)(1-\hat{R}_{11}(t)-2\hat{R}_{22}(t)) - g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})\hat{B}(t), \\
\frac{d\hat{U}_1(t)}{dt} &= g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})\hat{C}(t), \\
\frac{d\hat{U}_2(t)}{dt} &= -g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})\hat{C}(t), \\
\frac{d\hat{B}(t)}{dt} &= g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})(\hat{M}_1+1)\hat{A}_2(t) + g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})(\hat{M}_2+1)\hat{A}_1(t), \\
\frac{d\hat{C}(t)}{dt} &= g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})(\hat{M}_1+1)\hat{U}_2(t) - g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})(\hat{M}_2+1)\hat{U}_1(t), \\
\frac{d\hat{N}_1}{dt} &= g_1 \cos(k_{f_1}\hat{x})\hat{A}_1, \\
\frac{d\hat{N}_2}{dt} &= g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})\hat{A}_2. \\
\frac{d\hat{N}_2}{dt} &= g_2 \cos(k_{f_2}\hat{x})\hat{A}_2.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

(5.12) მოძრაობის განტოლებების დახმარებით ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ რომ შენახვადია შემდეგი სიდიდე

$$\hat{W} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar g_1 \hat{U}_1(t) \cos(k_{f_1}\hat{x}) + \hbar g_2 \hat{U}_2(t) \cos(k_{f_2}\hat{x})$$

მოვახდინოთ მიღებულ განტოლებათა სისტემის გასაშუალოება [111], შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$x = k_{f_1}\langle\hat{x}\rangle, \quad p = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{\hbar k_{f_1}}, \quad R_1 = \langle R_{11}\rangle, \quad R_2 = \langle R_{22}\rangle, \quad v_1 = \langle\hat{A}_1\rangle, \quad v_2 = \langle\hat{A}_2\rangle, \tag{5.13}$$

$$u_1 = \langle\hat{U}_1\rangle, \quad u_2 = \langle\hat{U}_2\rangle, \quad k = \frac{k_{f_2}}{k_{f_1}}, \quad v_1 = \langle\hat{A}_1\rangle, \quad v_2 = \langle\hat{A}_2\rangle, \quad B = \langle\hat{B}\rangle, \quad C = \langle\hat{C}\rangle,$$

$$\tau = t \cdot g_1, \quad \alpha = \frac{k_{f_1}^2 \hbar}{g_1 m}, \quad \Omega = \frac{g_2}{g_1}.$$

მაშინ საშუალო სიდიდეებისათვის განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\tau)}{d\tau} &= \alpha p(\tau), \\
\frac{dp(\tau)}{d\tau} &= u_1(\tau) \sin x + \Omega k u_2(\tau) \sin kx, \\
\frac{dR_1(\tau)}{d\tau} &= v_1(\tau) \cos x, \\
\frac{dR_2(\tau)}{d\tau} &= \Omega v_2(\tau) \cos kx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1(\tau)}{d\tau} &= 2 \cos x (M_1 + 1) (1 - 2R_1(\tau) - R_2(\tau)) - \Omega \cos kx \cdot B(\tau), \\
\frac{dv_2(\tau)}{d\tau} &= 2\Omega \cos kx (M_2 + 1) (1 - R_1(\tau) - 2R_2(\tau)) - \cos x \cdot B(\tau), \\
\frac{du_1(\tau)}{d\tau} &= \Omega \cos kx \cdot C(\tau), \\
\frac{du_2(\tau)}{d\tau} &= -\cos x \cdot C(\tau), \\
\frac{dB(\tau)}{d\tau} &= \cos x (M_1 + 1) v_2(\tau) + \Omega \cos kx (M_2 + 1) v_1(\tau), \\
\frac{dC(\tau)}{d\tau} &= \cos x (M_1 + 1) u_2(\tau) - \Omega \cos kx (M_2 + 1) u_1(\tau), \\
\frac{dN_1(\tau)}{d\tau} &= \cos x \cdot v_1(\tau), \\
\frac{dN_2(\tau)}{d\tau} &= \Omega \cos kx \cdot v_2(\tau).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

როცა  $p$  და  $x$  ნელა ცვლადია სხვა სიდიდეებთან შედარებით მაშინ სისტემა ხდება ინტეგრებადი და იყოფა ორ ქვესისტემად:

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{du_1(\tau)}{d\tau} &= \Omega \cos kx \cdot C(\tau), \\
\frac{du_2(\tau)}{d\tau} &= -\cos x \cdot C(\tau), \\
\frac{dC(\tau)}{d\tau} &= \cos x (M_1 + 1) u_2(\tau) - \Omega \cos kx (M_2 + 1) u_1(\tau).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

აქედან:

$$\frac{d^2 C(\tau)}{d\tau^2} = -\cos^2 x (M_1 + 1) C(\tau) - \Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) C(\tau),$$

ანდა

$$\frac{d^2 C(\tau)}{d\tau^2} + \Omega_1^2 C(\tau) = 0 \quad \text{სადაც} \quad \Omega_1^2 = \cos^2 x (M_1 + 1) + \Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) \tag{5.16}$$

ე.ი. მივიღეთ ოსცილატორის რხევის განტოლება.

(5. 15) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია:

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= A \sin(\Omega_1 \tau + \varphi), \\
u_1(\tau) &= u_1(0) - \frac{A \Omega \cos kx}{\Omega_1} (\cos(\Omega_1 \tau + \varphi) - \cos \varphi),
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$u_2(\tau) = u_2(0) + \frac{A \cos x}{\Omega_1} (\cos(\Omega_1 \tau + \varphi) - \cos \varphi),$$

$$\text{სადაც} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1}{A_2}, \quad A_1 = C(0),$$

$$A_2 = \frac{\cos x(M_1 + 1)u_2(0) - \Omega \cos kx(M_2 + 1)u_1(0)}{\Omega_1}.$$

შევარჩიოთ საწყისი პირობები ისე რომ  $C(0) = 0$  მაშინ  $\varphi = 0$ , გარდა ამისა ავიდლოთ  $x = 0$ , მაშინ  $\cos x = 1$ ,  $\cos kx = 1$  და ამონახსნი მიიღებს უფრო მარტივ სახეს:

$$C(\tau) = A \sin(\Omega_1 \tau),$$

$$u_1(\tau) = u_1(0) - \frac{A\Omega}{\Omega_1} (\cos(\Omega_1 \tau) - 1), \quad (5.18)$$

$$u_2(\tau) = u_2(0) + \frac{A}{\Omega_1} (\cos(\Omega_1 \tau) - 1),$$

რადგანაც  $x$  ნელა იცვლება სწრაფად ოსცილირებად  $u_1(\tau)$  და  $u_2(\tau)$  ცვლადებთან შედარებით, ამიტომ  $u_1(\tau)$  და  $u_2(\tau)$  შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სივრცულად დამოუკიდებელი გარე სიგნალი რომელიც ზემოქმედებას ახდენს გადატანით მოძრაობაზე.

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + |\alpha| u_1(\tau) \sin x + |\alpha| \Omega u_2(\tau) \sin kx = 0.$$

მოცემული განტოლება შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ჰამილტონიანიდან:

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - |\alpha| u_1(\tau) \cos x - |\alpha| \Omega u_2(\tau) \cos(kx)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\omega^2 = |\alpha| (u_1(0) + \frac{A\Omega}{\Omega_1}), \quad \omega_1^2 = |\alpha| \Omega (u_2(0) - \frac{A}{\Omega_1}), \quad \omega_2^2 = \frac{|\alpha| \Omega A}{\Omega_1}.$$

$$H = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 \cos x - \omega_1^2 \cos kx + \omega_2^2 (\cos x \cdot \cos \Omega_1 \tau - \cos kx \cdot \cos \Omega_1 \tau) = H_0 + V.$$

სადაც  $H_0 = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \omega^2 \cos x - \omega_1^2 \cos kx$  არის შეუშფოთებელი ჰამილტონიანი,

ხოლო

$$V = \omega_2^2 (\cos x \cdot \cos \Omega_1 \tau - \cos kx \cdot \cos \Omega_1 \tau) =$$

$$\frac{\omega_2^2}{2} (\cos(x + \Omega_1 \tau) + \cos(x - \Omega_1 \tau) - \cos(kx + \Omega_1 \tau) - \cos(x - \Omega_1 \tau))$$

არის გარე შეშფოთება.

იმ შემთხვევაში როდესაც  $k = \frac{k_{f_1}}{k_{f_2}} = 1$ , ატომის მოძრაობა ქვანტური რეზონატორის

შიგნით აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + |\alpha| (u_1(0) + u_2(0)) \sin(x) = 0. \quad (5.19)$$

(6.19) განტოლების ამონახსნები შეიძლება მოცემულ იქნას ელიფსური ფუნქციებით:

$$\frac{dx}{d\tau} = p = 2\Theta \omega_0 \begin{cases} cn(\tau \omega_0, \Theta), & \Theta \leq 1, \\ dn(\tau \omega_0 \Theta, 1/\Theta), & \Theta \geq 1. \end{cases} \quad (5.20)$$

სადაც  $\Theta = \frac{1}{2}(1 + H/\omega_0^2)$ ,  $\omega_0^2 = |\alpha|(u_1(0) + u_2(0))$ ,  $H = \frac{p^2(0)}{2} - \omega_0^2 \cos(x(0))$  და  $cn(\dots)$ ,

$dn(\dots)$  არის იაკობის ელიფსური ფუნქციები [116].

ერთ-ერთი ამ ამონახსნებიდან  $cn(\dots)$  შეესაბამება ჩაკეტილ ფაზურ ტრანექტორიებს, რაც ნიშნავს რომ რაღაც დროის ინტერვალის შემდეგ სისტემა დაუბრუნდება საწყის მდგომარეობას. მეორე ამონახსნი შეესაბამება ღია ფაზურ ტრანექტორიებს.

$$\text{II) } \frac{dR_1(\tau)}{d\tau} = v_1(\tau) \cos x,$$

$$\frac{dR_2(\tau)}{d\tau} = \Omega v_2(\tau) \cos kx, \quad (5.21)$$

$$\frac{dv_1(\tau)}{d\tau} = 2 \cos x (M_1 + 1) (1 - 2R_1(\tau) - R_2(\tau)) - \Omega \cos kx \cdot B(\tau),$$

$$\frac{dv_2(\tau)}{d\tau} = 2\Omega \cos kx (M_2 + 1) (1 - R_1(\tau) - 2R_2(\tau)) - \cos x \cdot B(\tau),$$

$$\frac{dB(\tau)}{d\tau} = \cos x (M_1 + 1) v_2(\tau) + \Omega \cos kx (M_2 + 1) v_1(\tau),$$

$$\frac{dN_1(\tau)}{d\tau} = \cos x \cdot v_1(\tau),$$

$$\frac{dN_2(\tau)}{d\tau} = \Omega \cos kx \cdot v_2(\tau).$$

შედეგად მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d^2 R_1(\tau)}{d\tau^2} + (4 \cos^2 x (M_1 + 1) + \Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1)) R_1(\tau) + 3 \cos^2 x (M_1 + 1) R_2 -$$

$$- 2 \cos^2 x (M_1 + 1) - K = 0,$$

(5.22)

$$\frac{d^2 R_2(\tau)}{d\tau^2} + (4\Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) + \cos^2 x (M_1 + 1)) R_2(\tau) + 3\Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) R_1 -$$

$$- 2\Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) - K = 0.$$

სადაც

$$K = \cos x \cdot \Omega \cdot \cos kx B(\tau) - \cos^2 x (M_1 + 1) R_2(\tau) - \Omega^2 \cos^2 kx (M_2 + 1) R_1(\tau).$$

იმ მიახლოებაში, როდესაც  $x$  ნელად ცვლადია, (5.22) განტოლებათა სისტემა იგივეა რაც [108] ნაშრომში მოყვანილი განტოლებათა სისტემა (გვ.162 ფორმულა 5.18) მხოლოდ  $g_1 \rightarrow \cos x$  და  $g_2 \rightarrow \Omega \cos kx$  და თავისი არსით წარმოადგენს ორი ბმული ოსცილატორის განტოლებათა სისტემას რომელიც იმყოფება გარე ველში. ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნია:

$$R_1(\tau) = \mu(\cos \lambda \tau - 1) + \beta \sin \lambda \tau + \lambda_1^2 [u(\cos 2\lambda \tau - 1) + v \sin 2\lambda \tau] + R_1(0), \quad (5.23)$$

$$R_2(\tau) = -\mu(\cos \lambda \tau - 1) - \beta \sin \lambda \tau + \lambda_2^2 [u(\cos 2\lambda \tau - 1) + v \sin 2\lambda \tau] + R_2(0),$$

სადაც

$$\mu = \lambda^{-4} \{ \lambda^2 [\lambda_2^2 R_1(0) - \lambda_1^2 R_2(0)] + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) K \},$$



$$\beta = \lambda^{-3} \{ \lambda_2^2 \dot{R}_1(0) - \lambda_1^2 \dot{R}_2(0) \},$$

$$u = \frac{1}{2} \lambda^{-4} \{ \lambda^2 [2R_1(0) + 2R_2(0) - 1] + K \}, \quad (5.24)$$

$$v = \frac{1}{2} \lambda^{-3} \{ \dot{R}_1(0) + \dot{R}_2(0) \}, \quad \lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2},$$

$$\lambda_1 = \cos x \sqrt{M_1 + 1}, \quad \lambda_2 = \Omega \cos kx \sqrt{M_2 + 1}.$$

(5.22) დან შეგვიძლია მივიღოთ ამონახსნები სხვა ცვლადებისათვის, მაგალითად:

$$N_1(\tau) = \mu(\cos \lambda \tau - 1) + \beta \sin \lambda \tau - \lambda_1^2 [u(\cos 2\lambda \tau - 1) + v \sin 2\lambda \tau] + N_1(0),$$

$$N_2(\tau) = -\mu(\cos \lambda \tau - 1) - \beta \sin \lambda \tau + \lambda_2^2 [u(\cos 2\lambda \tau - 1) + v \sin 2\lambda \tau] + N_2(0),$$

და ასე შემდეგ.

აღსანიშნავია, რომ ადიაბატურ შემთხვევაში  $K$  წარმოადგენს მოძრაობის

$$\text{ინტეგრალს: } \frac{dK}{d\tau} = 0.$$

ექსპერიმენტზე შეიძლება დამზერილ იქნას სიდიდეები:

$$R_1(\tau), R_2(\tau), R_3(\tau) = 1 - R_1(\tau) - R_2(\tau).$$

ჩვენ აქ განვიხილეთ შემთხვევა როდესაც  $x(\tau)$  არის ადიაბატური ცვლადი.

## 5.2 რიცხვითი შედეგები

ზოგად შემთხვევაში, როდესაც  $x(\tau)$  არ არის ადიაბატური ცვლადი, (5.14)

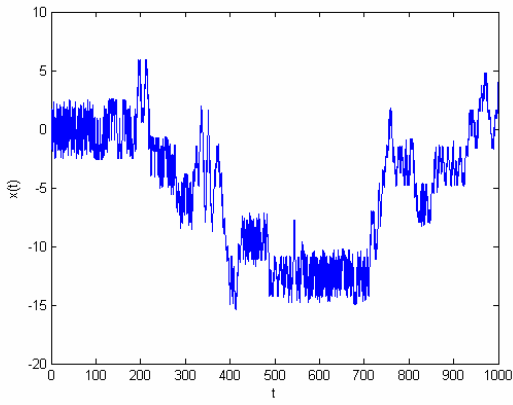
სისტემის გამოკვლევა უნდა მოხდეს რიცხვითი მეთოდებით. როდესაც  $x(\tau)$  არ არის ადიაბატური ცვლადი, სისტემაში ქაოსის წარმოქმნა სრულიად შესაძლებელია. ამ შემთხვევაში სისტემის დინამიკური ანალიზი აზრს კარგავს და უნდა გადავიდეთ სტატისტიკურ აღწერაზე. პარამეტრები, რომლებიც ახასიათებენ სისტემას სტატისტიკურად, კერძოდ კოლმოგოროვის ენტროპია და ლიაპუნოვის ექსპონენენტები ხდება მნიშვნელოვანი. ეს პარამეტრები ახასიათებენ სისტემის ფაზური ტრაექტორიების ლოკალურ არამდგრადობებს. რიცხვითი ინტეგრების შედეგები პარამეტრების რეალური მნიშვნელობებისათვის, რაც შეესაბამება მაღალი სიზუსტის ფაბრი-პეროს ტიპის რეზონატორებს და რეალურ ატომებს, მოყვანილია ნახ. 5.2-ზე.

ქვემოთ მოყვანილ გრაფიკებზე ყველგან საწყის პირობებზე აღებულია

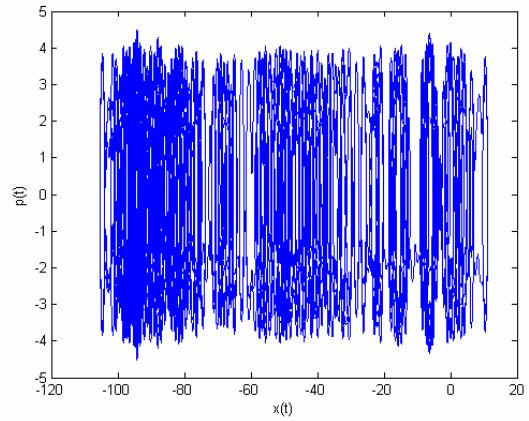
$$x(0) = 1.65, p(0) = 1.19, R_1(0) = 1, R_2(0) = 0, R_3(0) = 0, v_1(0) = -4.95, v_2(0) = 5.63,$$

$$u_1(0) = -6.52, u_2(0) = 7.91, B(0) = -5.85, C(0) = -6.83.$$

$$\text{ხოლო } \alpha = 1.25, \Omega = 0.5, k = 3, M_1 = 1.6, M_2 = 1.7.$$



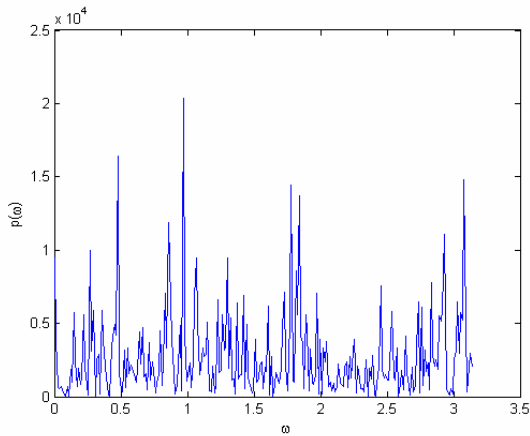
ა)



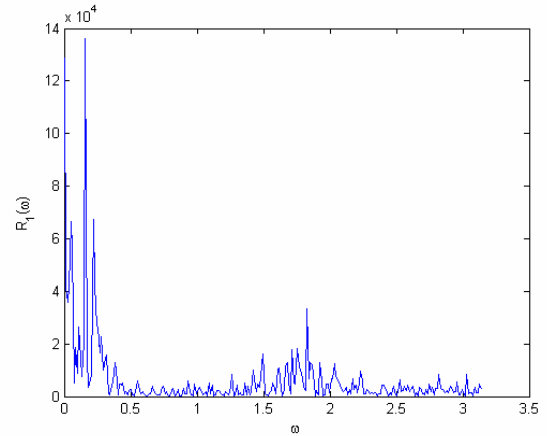
ბ)

ნახ. 5.2  $x(\tau)$ -ს  $\tau$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. როგორც გრაფიკიდან ჩანს ატომის მოძრაობას რეზონატორის შიგნით აქვს ქაოსური ხასიათი.

ბ)  $p(\tau)$ -ს  $x(\tau)$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი.



ა)

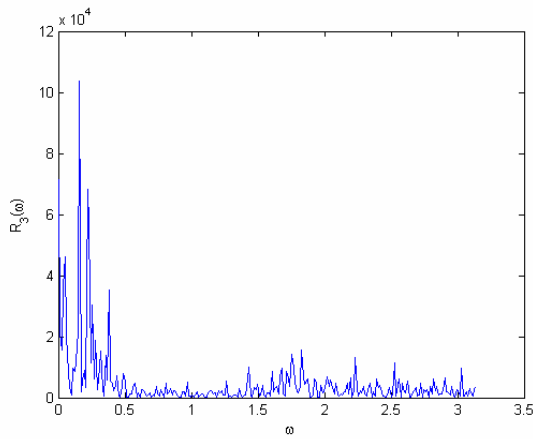


ბ)

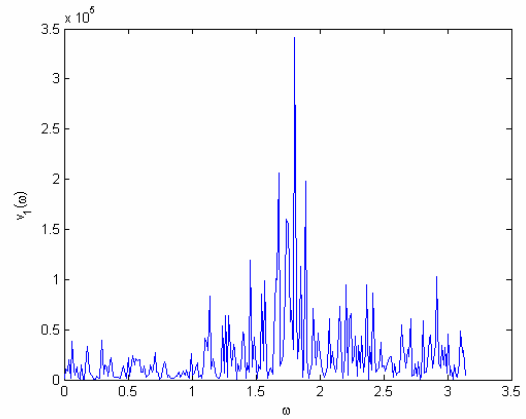
ნახ.5.3 ა) იმპულსის კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახის

$$p(\omega) = G_p(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) G_p(\tau) \quad \omega \text{ სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი.}$$

კორელაციური ფუნქციის სასრული სიგანე ნიშანია სისტემაში კლასიკური დინამიური სტოხასტურობის არსებობისა. ბ)  $R_1(t)$ -ს კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახის  $\omega$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი.



ა)



ბ)

ნახ. 5.4 ა)  $R_3(t)$ -ს კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახის  $\omega$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი ბ)  $\nu_1(t)$ -ს კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახის  $\omega$  სიხშირეზე დამოკიდებულების გრაფიკი

სისტემაში ქაოსის არსებობის დასადასტურებლად გამოვიყენეთ სხვადასხვა ფიზიკური სიდიდეების კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახე:

$$G_x(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle, \quad G_x(\omega) = \int_0^\infty d\tau G_x(\tau) \exp(i\omega\tau) = \frac{\tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2} \quad (5.25)$$

სადაც  $\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$  აღნიშნავს დროით გასაშუალებას,  $\tau_c$  კორელაციის

დროა. რიცხვითი ინტეგრების შედეგები ზოგიერთი ფიზიკური სიდიდისათვის მოყვანილია ნახ. 5.3-5.4. კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახის სასრული სიგანე სისტემაში ქაოსის არსებობის ნიშანია.

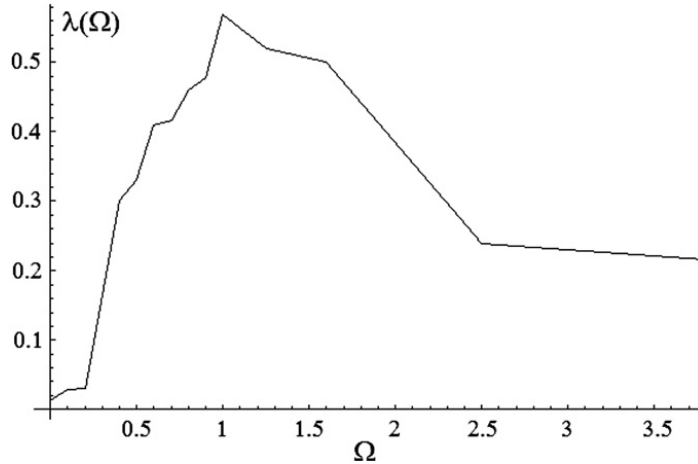
სისტემაში ქაოსის არსებობის ერთ-ერთი დამადასტურებელი ნიშანია ლიაპუნოვის ექსპონენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა. საინტერესოა ჩვენს მიერ მიღებული შედეგის ჩვეულებრივი ჯეიმს-კომინგსის მოდელის განხილვისას მიღებულ შედეგთან [11] შედარება. ლიაპუნოვის მაქსიმალური ექსპონენტის დასათვლელად ჩვენ გამოვიყენეთ შემდეგი ალგორითმი, რომელიც მოყვანილია შრომებში [12,15,111] და შედეგა შემდეგი პროცედურებისაგან: ჩვენ ვხსნით სისტემას ორი განსხვავებული საწყისი პირობით:  $x_0$ ,  $x_0 + \bar{x}_0^0$ ,  $\bar{x}_0^0 = \varepsilon$ , სადაც  $\varepsilon$  არის მცირე საწყისი მანძილი ფაზურ ტრაექტორიებს შორის. შემდეგ ინტეგრების ყოველი ბიჯის შემდეგ  $x(t_i) = x_i$  ჩვენ ვახდენთ საწყისი პირობების გადანომვრას:

$\bar{x}_i^0 = \frac{\varepsilon \bar{x}_i}{|\bar{x}_i|}$  და ვიყენებთ  $x_i$ ,  $x_i + \bar{x}_i^0$  როგორც საწყისი პირობებს და ვაგრძელებთ ასე

$x_N$ ,  $x_N + \bar{x}_N^0$ -მდე. შემდეგ ლიაპუნოვის ექსპონენტა იწერება შემდეგი ფორმით:

$$\Lambda = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \left( \frac{|\bar{x}_k|}{\varepsilon} \right) \quad (5.26)$$

ლიაპუნოვის მაქსიმალური ექსპონენტის დათვლის რიცხვითი შედეგები მოყვანილია ნახ. 5.5-ზე. როგორც ნახ.5.5-დან ჩანს ჩვეულებრივი ჯეიმს კომინგსის მოდელის შემთხვევაში შეესაბამება პარამეტრის  $\Omega = 0$  ნულთან ტოლობის შემთხვევა. ამ შემთხვევაში ლიაპუნოვის ექსპონენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა ნულის ტოლია. ეს შედეგი კარგ თანხმობაშია შედეგთან რომელიც მიღებულია [111].



ნახ. 5.5 ლიაპუნოვის ექსპონენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა როგორც ატომისა და გამოსხივების ველის ურთიერთქმედების მუდმივების ფარდობის ფუნქცია ( $\Omega = g_2 / g_1$ ).

### 5.3 კვანტურ-მექანიკური განხილვა, ნარევი მდგომარეობის მიღება

წინა პარაგრაფში ნახვენები რიცვითი გამოთვლების შედეგებიდან შეგვიძლია გამოვიტანოთ დასკვნა რომ ატომის დინამიკა რეზონატორის შიგნით არის ქაოსური. კვანტურ მექანიკური განხილვის დროს ჩვენ უზულებელყოფთ ატომის მოძრაობის კინეტიკურ ენერჯიას, ატომის შიდა დონეთა შორის გადასვლის სისწირესთან შედარებით, თუმცა მხედველობაში მივიღებთ ატომის მოძრაობის შემთხვევით ხასიათს რეზონატორის შიგნით და განვიხილავთ  $x(t)$  სიდიდეს, როგორც დროზე დამოკიდებულ შემთხვევით ვინერის პროცესს. ამის გათვალისწინებით შრედინგერის განტოლებას ურთიერთქმედების წარმოდგენაში აქვს შემდეგი სახე:

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{V}|\psi(t)\rangle \quad (5.27)$$

სადაც ურთიერთქმედების ოპერატორს აქვს შემდეგი ფორმა:

$$\hat{V} = \hbar \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha} (\hat{b}_{\alpha} \hat{R}_{3\alpha} + \hat{b}_{\alpha}^{\dagger} \hat{R}_{\alpha 3}) \cdot \cos k_{f_{\alpha}} \hat{x}. \quad (5.28)$$

დროის საწყის მომენტში ატომსა და ველს შორის ურთიერთქმედების ჩართვამდე, ატომის და ველის მდგომარეობები ერთმანეთისაგან არის გაყოფილი, ამიტომაც ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ატომისა და ველის მდგომარეობების ტალღური ფუნქციების პირდაპირი ნამრავლი:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{atom}\rangle \otimes |\psi_{field}\rangle \quad (5.29)$$

სადაც

$$|\psi_{field}\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} W_{n_1} |n_1\rangle + \sum_{n_2=0}^{\infty} W_{n_2} |n_2\rangle, \quad |\psi_{atom}\rangle = C_{a_1} |a_1\rangle + C_{a_2} |a_2\rangle + C_{a_3} |a_3\rangle,$$

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

სადაც  $W_{n_{1,2}}$  ცვლადები აღწერენ ველის მდგომარეობებს.

რადგან (5.28) ოპერატორს ერთმანეთში გადაჰყავს მდგომარეობები  $|a_3 n_1\rangle$ ,  $|a_1 n_1 + 1\rangle$ ,  $|a_3 n_2\rangle$ ,  $|a_2 n_2 + 1\rangle$  ამიტომ (5.27) განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ფორმით:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a_j n_i} C_{a_j n_i}(t) |a_j n_i\rangle = \quad (5.30)$$

$$= C_{a_3 n_1}(t) |a_1 n_1\rangle + C_{a_1 n_1 + 1}(t) |a_1 n_1 + 1\rangle + C_{a_3 n_2}(t) |a_3 n_2\rangle + C_{a_2 n_2 + 1}(t) |a_2 n_2 + 1\rangle$$

(5.30)-ის ჩასმით (5.27)-ში და (5.28), (5.3), (5.4)-ის და (5.5) თანაფარდობების გამოყენებით მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას  $C_{a_j n_i}$  კოეფიციენტების მიმართ:

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} C_{a_3 n_1}(t) = g_1 \sqrt{n_1 + 1} \cos k_{f_1} x \cdot C_{a_1 n_1 + 1}(t) \\ i \frac{d}{dt} C_{a_1 n_1 + 1}(t) = g_1 \sqrt{n_1 + 1} \cos k_{f_1} x \cdot C_{a_3 n_1}(t) \end{cases} \quad (5.31)$$

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} C_{a_3 n_2}(t) = g_2 \sqrt{n_2 + 1} \cos k_{f_2} x \cdot C_{a_2 n_2 + 1}(t) \\ i \frac{d}{dt} C_{a_2 n_2 + 1}(t) = g_2 \sqrt{n_2 + 1} \cos k_{f_2} x \cdot C_{a_3 n_2}(t) \end{cases} \quad (5.32)$$

(5.31) დან მივიღებთ ასეთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} A(t) = g_1 \cos k_{f_1} x \cdot \sqrt{n_1 + 1} A(t) \\ i \frac{d}{dt} B(t) = -g_1 \cos k_{f_1} x \cdot \sqrt{n_1 + 1} B(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\text{სადაც } A(t) = C_{a_3 n_1}(t) + C_{a_1 n_1 + 1}(t), \quad B(t) = C_{a_3 n_1}(t) - C_{a_1 n_1 + 1}(t). \quad (5.34)$$

(5.33) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია:

$$A(t) = C_1 e^{-i \int_0^t g_1 \sqrt{n_1 + 1} \cos k_{f_1} x(t') dt'}, \quad B(t) = C_2 e^{i \int_0^t g_1 \sqrt{n_1 + 1} \cos k_{f_1} x(t') dt'} \quad (5.35)$$

(5.34)-დან (5.35) თანაფარდობების გამოყენებით მივიღებთ:

$$C_{a_3 n_1} = \frac{C_1}{2} e^{-i \lambda_1 \int_0^t \cos k_{f_1} x(t') dt'} + \frac{C_2}{2} e^{i \lambda_1 \int_0^t \cos k_{f_1} x(t') dt'}, \quad (5.36)$$

$$C_{a_1 n_1 + 1} = \frac{C_1}{2} e^{-i \lambda_1 \int_0^t \cos k_{f_1} x(t') dt'} - \frac{C_2}{2} e^{i \lambda_1 \int_0^t \cos k_{f_1} x(t') dt'},$$

$$\text{სადაც } \lambda_1 = g_1 \sqrt{n_1 + 1}, \text{ ხოლო } C_1 = C_{a_3 n_1}(0) + C_{a_1 n_1 + 1}(0), \quad C_2 = C_{a_3 n_1}(0) - C_{a_1 n_1 + 1}(0),$$

ანალოგიურად (5.32) განტოლებათა სისტემიდან მივიღებთ:

$$C_{a_3 n_2} = \frac{C_3}{2} e^{-i \lambda_2 \int_0^t \cos k_{f_2} x(t') dt'} + \frac{C_4}{2} e^{i \lambda_2 \int_0^t \cos k_{f_2} x(t') dt'}, \quad (5.37)$$

$$C_{a_2 n_2 + 1} = \frac{C_3}{2} e^{-i \lambda_2 \int_0^t \cos k_{f_2} x(t') dt'} - \frac{C_4}{2} e^{i \lambda_2 \int_0^t \cos k_{f_2} x(t') dt'}$$

სადაც  $\lambda_2 = g_2 \sqrt{n_2 + 1}$ , ხოლო  $C_3 = C_{a_2 n_2}(0) + C_{a_2 n_2 + 1}(0)$ ,  $C_4 = C_{a_2 n_2}(0) - C_{a_2 n_2 + 1}(0)$ , სისტემის სიმკვრივის მატრიცა არის ატომისა და ველის სიმკვრივის მატრიცების პირდაპირი ნამრავლი:

$$\rho_{ijkl} = \rho_{atom} \otimes \rho_{fiels} = \overline{C_{a_i n_j} \cdot C_{a_k n_l}^*} \quad (5.38)$$

სადაც  $\overline{(\dots)}$  ნიშნავს სტატისტიკურ გასაშუალებას.

თუ ჩავსვავთ (5.36) და (5.37) გამოსახულებებს (5.38)-ში ადვილი სანახავია რომ სიმკვრივის მატრიცის არადიაგონალური ელემენტები შეიცავს შემდეგი ტიპის ინტერფერენციულ წევრებს :

$$C_{a_i n_j}(0) C_{a_k n_l}^*(0) \exp \left[ i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \quad (5.39)$$

სადაც  $\omega(t') = 2\lambda_{1,2} \cos(k_{f_1} x(t'))$  ანდა  $\omega(t') = \lambda_1 \cos(k_{f_1} x(t')) \pm \lambda_2 \cos(k_{f_2} x(t'))$ .

$x(t')$  სიდიდის შემთხვევითობის გამო  $\omega(t')$  შევიძლია განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი პროცესი. უფრო ზუსტად ექსპონენტი (5.38) ფორმულაში შევიძლია განვიხილოთ როგორც შემთხვევითი პროცესის  $\omega(t')$ -ის ფუნქციონალი:

$$Q[\omega] = \exp \left[ i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \quad (5.40)$$

ამიტომაც, იმისათვის რომ მივიღოთ სიმკვრივის მატრიცის არადიაგონალური ელემენტები (5.40) გამოსახულება უნდა გავასაშუალოთ  $\omega(t)$  შემთხვევითი ფუნქციის ყველა შესაძლო ალბათობით:

$$\langle Q[\omega] \rangle = \left\langle \exp \left[ i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \right\rangle \quad (5.41)$$

სადაც  $\langle \dots \rangle$  აღნიშნავს სტატისტიკურ გასაშუალებას: (5.41) გამოსახულების საშუალო მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ თუ ავიღებთ შემდეგ კონტინუალურ ინტეგრალს [115]:

$$\langle Q[\omega] \rangle = \left\langle \exp \left[ i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \right\rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_k \rightarrow 0}} \int d\omega_N \dots d\omega_1 \exp \left[ i \sum_{k=1}^N \omega_k \Delta t_k \right] P_N \quad (5.42)$$

სადაც  $\Delta t_k = t^{(k)} - t^{(k-1)}$ ,  $t^{(0)} = 0$ ,  $t^{(N)} = t$ , ხოლო  $P_N[\omega]$  არის მრავალგანზომილებიანი ნორმალური განაწილების ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$P_N[\omega] = (2\pi)^{-N} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \exp \left[ -i \sum_k \lambda_k \omega_k \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k,k'} C_{kk'} \lambda_k \lambda_{k'} \right] \quad (5.43)$$

სადაც  $\lambda_k$  არის განაწილების პარამეტრები და  $C_{kk'}$  კოვარიაციული მატრიცა. (5.42)-ის (5.41)-ში ჩასმით და ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
& \int d\omega_1 \dots d\omega_N \exp \left[ i \sum_{k=1}^N \omega_k \Delta t_k \right] P_N[\omega] = \\
& = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{k,k'} C_{k,k'} \lambda_k \lambda_{k'} \right] \times \prod_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int \exp [i\omega_k (\Delta t_k - \lambda_k)] d\omega_k \right\} = \quad (5.44) \\
& = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \delta(\lambda_1 - \Delta t_1) \delta(\lambda_2 - \Delta t_2) \dots \delta(\lambda_N - \Delta t_N) \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k,k'} C_{k,k'} \Delta t_k \Delta t_{k'} \right]
\end{aligned}$$

შესაბამისად  $Q[\omega]$  ფუნქციონალის საშუალო მნიშვნელობისათვის მივიღებთ:

$$\langle Q[\omega] \rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t_k \rightarrow 0}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{k,k'} C(t^{(k)}, t^{(k')}) \Delta t_k \Delta t_{k'} \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t''} C(t', t'') \right] \quad (5.45)$$

ნორმალური შემთხვევითი პროცესისათვის  $C(t', t'') = C(t' - t'')$ . თუ შემოვიყვანოთ ახალ ცვლადებს:  $t' - t'' = \tau$ ,  $t' + t'' = \xi$  და მოვახდენთ ინტეგრებას  $\xi$  ცვლადით, მივიღებთ:

$$\langle Q[\omega] \rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{-t}^t d\tau C(\tau) \right] \quad (5.46)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ რომ  $C(\tau)$ -ს აქვს გაუსის ფორმა  $C(\tau) = e^{-\alpha_0 \tau^2}$  (5.46)-დან მივიღებთ:

$$\langle Q[\omega] \rangle \approx \exp \left[ -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0}} \frac{t}{2} \operatorname{Erf} \left[ t \sqrt{\alpha_0} \right] \right] \quad (5.47)$$

სადაც  $\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  ალბათობის ინტეგრალია [116] და  $1/\alpha_0$   $C(\tau)$

კორელაციური ფუნქციის სიგანეა. შესაბამისად ინტერფერენციული წვევრებისათვის გვექნება:

$$C_{a_n j}(0) C_{a_k n_i}^*(0) \exp \left[ i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \approx C_{a_n j}(0) C_{a_k n_i}^*(0) \exp \left[ -\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_0}} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{erf} \left[ t \sqrt{\alpha_0} \right] \right] \quad (5.48)$$

(5.47) ფორმულიდან გამომდინარეობს რომ  $t > \sqrt{\alpha_0}/\pi$  დროის შემდეგ, ადგილი აქვს ინტერფერენციული წვევრების განულებას, რაც ნიშნავს მდგომარეობებს შორის ინტერფერენციის გაქრობას, რაც დამახასიათებელია სუფთა მდგომარეობებისთვის [117]. ადგილი აქვს ტალღური ფუნქციის ფაზაზე

ინფორმაციის დაკარგვას. ეს კი იმას ნიშნავს რომ სისტემა  $t > \sqrt{\alpha_0}/\pi$  დროის შემდეგ გადადის სუფთა მდგომარეობიდან ნარევი მდგომარეობაში. ამრიგად კლასიკურ ქაოსს ქვანტურად შეესაბამება სისტემის გადასვლა სუფთა მდგომარეობიდან ნარევიში, რაც ქვანტური ქაოსის ერთ-ერთი დამახასიათებელი ნიშანი უნდა იყოს.

## 5.4 კინეტიკური აღწერა

წინა პარაგრაფში ჩვენ განვიხილეთ ნარევი მდგომარეობის მიღების მექანიზმი. ნარევი მდგომარეობის ჩამოყალიბების შემდეგ ქვანტურ-მექანიკური აღწერა კარგავს აზრს და საჭირო ხდება კინეტიკური აღწერაზე გადასვლა. ქაოსური ქვანტურ-მექანიკური სისტემის კინეტიკური განტოლება პირველად მიღებული იქნა [29]-ში კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში. კერძოთ სიმკვრივის მატრიცის

არადიაგონალური ელემენტების განულება, შემოწმებული იქნა კვაზიკლასიკურ მიხედვებაში.

ვაჩვენოთ რომ სისტემის ნარევი მდგომარეობაში გადასვლის პროცესი არის შეუქცევადი. თუ განვიხილავთ ატომს+ველი სისტემას ადიაბატურად იზოლირებულს, მაშინ მისი ენტროპიის ნაზრდი იქნება ნულის ტოლი. მაგრამ თუ ველს განვიხილავთ როგორც თერმოსტატს, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ატომური ქვესისტემის ენტროპიის ნაზრდი  $\Delta S$ , თუ  $\Delta S > 0$ , მაშინ პროცესი არის შეუქცევადი.

როგორც ზემოთ ავნიშნეთ დროის საწყის მომენტში  $t=0$ , ატომი არ არის დაკავშირებული ველთან და მდგომარეობის ვექტორი  $|\psi(t=0)\rangle$  არის ველისა და ატომის მდგომარეობების პირდაპირი ნამრავლი:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{atom}\rangle \otimes |\psi_{field}\rangle \quad (5.49)$$

სადაც

$$|\psi_{field}\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} W_{n_1} |n_1\rangle + \sum_{n_2=0}^{\infty} W_{n_2} |n_2\rangle, \quad |\psi_{atom}\rangle = C_{a_1} |a_1\rangle + C_{a_2} |a_2\rangle + C_{a_3} |a_3\rangle \quad (5.50)$$

რადგანაც (5.28) ურთიერთქმედებას ერთმანეთში გადაჰყავს მდგომარეობები:

$$|a_3 n_1\rangle, |a_1 n_1 + 1\rangle, |a_3 n_2\rangle, |a_2 n_2 + 1\rangle$$

(5.30)-დან და (5.50)-დან ჩვენ მივიღებთ შემდეგ საწყის მდგომარეობებს:

$$\begin{aligned} C_{a_3 n_1}(0) &= W_{n_1} C_{a_3}, & C_{a_1 n_1 + 1}(0) &= W_{n_1 + 1} C_{a_1}, \\ C_{a_3 n_2}(0) &= W_{n_2} C_{a_3}, & C_{a_2 n_2 + 1}(0) &= W_{n_2 + 1} C_{a_2}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

ატომის მდგომარეობების დასახლებების ალბათობები განისაზღვრება  $C_{an}$  კოეფიციენტების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$W(t, |a\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{an}|^2 \quad (5.52)$$

თუ გავითვალისწინებთ (5.36), (5.37) თანაფარდობებს და (5.51) საწყის პირობებს (5.52)-დან მივიღებთ:

$$\begin{aligned} W(t, |a_3\rangle) &= \frac{1}{4} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left| (W_{n_1} C_{a_3} + W_{n_1+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_1}[\omega_1(t)] + (W_{n_1} C_{a_3} - W_{n_1+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_1}^*[\omega_1(t)] \right|^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| (W_{n_2} C_{a_3} + W_{n_2+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_2}[\omega_1(t)] + (W_{n_2} C_{a_3} - W_{n_2+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_2}^*[\omega_2(t)] \right|^2; \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$W(t, |a_1\rangle) = \frac{1}{4} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left| (W_{n_1} C_{a_3} + W_{n_1+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_1}[\omega_1(t)] - (W_{n_1} C_{a_3} - W_{n_1+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_1}^*[\omega_1(t)] \right|^2;$$

$$W(t, |a_2\rangle) = \frac{1}{4} \sum_{n_2=0}^{\infty} \left| (W_{n_2} C_{a_3} + W_{n_2+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_2}[\omega_1(t)] - (W_{n_2} C_{a_3} - W_{n_2+1} C_{a_1}) \mathcal{Q}_{n_2}^*[\omega_2(t)] \right|^2;$$

(5.53)-ში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\mathcal{Q}_{n_{1,2}}[\omega_{1,2}] = \exp \left[ -ig_{1,2} \sqrt{n_{1,2} + 1} \int_0^t \cos(k_{f_{1,2}} x(t')) dt' \right], \quad (5.54)$$

$$\mathcal{Q}_{n_{1,2}}^*[\omega_{1,2}] = \mathcal{Q}_{n_{1,2}}^{-1}[\omega_{1,2}], \quad \mathcal{Q}_{n_{1,2}}[\omega_{1,2}] \mathcal{Q}_{n_{1,2}}^{-1}[\omega_{1,2}] = 1.$$

(5.53) გამოსახულებები გვაძლევს დონების დასახლებას დროის ნებისმიერი მომენტისათვის. ჩვეულებრივი ჯეიმს-კომინგსის მოდელში რეზონანსულ



შემთხვევაში მოძრაობის დინამიკა არის რეგულარული და ამიტომაც დონეების დასახლებები არის დროის პერიოდული ფუნქციები [118]. განზოგადებულ ჯეიმს-კომინგსის მოდელში რეზონანსულ შემთხვევაში, როგორც ვნახეთ სისტემაში შესაძლებელია ქაოსი, ამიტომაც დონეების დასახლებები აღარ არიან დროის პერიოდული ფუნქციები და ეს შესაძლებლობას იძლევა ქვანტური ქაოსის ექსპერიმენტული დამზერისათვის, რადგანაც ექსპერიმენტზე იზომება დონეების დასახლებებს შორის სხვაობები:

$$I_{a_3 a_2} = W(t, |a_3\rangle) - W(t, |a_2\rangle), \quad I_{a_3 a_1} = W(t, |a_3\rangle) - W(t, |a_1\rangle), \quad (5.55)$$

(5.53)-დან მივიღებთ:

$$\langle W(t, |a_1\rangle) \rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_1}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_1+1}^2 C_{a_1}^2) - \frac{1}{4} (W_{n_1}^2 C_{a_3}^2 - W_{n_1+1}^2 C_{a_1}^2) (\langle Q_{n_1}^2 [\omega_1] \rangle + \langle Q_{n_1}^{-2} [\omega_1] \rangle) \right]; \quad (5.56)$$

$$\langle W(t, |a_2\rangle) \rangle = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_2}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_2+1}^2 C_{a_2}^2) - \frac{1}{4} (W_{n_2}^2 C_{a_3}^2 - W_{n_2+1}^2 C_{a_2}^2) (\langle Q_{n_2}^2 [\omega_2] \rangle + \langle Q_{n_2}^{-2} [\omega_2] \rangle) \right].$$

$$\langle W(t, |a_3\rangle) \rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_1}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_1+1}^2 C_{a_1}^2) + \frac{1}{4} (W_{n_1}^2 C_{a_3}^2 - W_{n_1+1}^2 C_{a_1}^2) (\langle Q_{n_1}^2 [\omega_1] \rangle + \langle Q_{n_1}^{-2} [\omega_1] \rangle) \right] +$$

$$+ \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_2}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_2+1}^2 C_{a_2}^2) + \frac{1}{4} (W_{n_2}^2 C_{a_3}^2 - W_{n_2+1}^2 C_{a_2}^2) (\langle Q_{n_2}^2 [\omega_2] \rangle + \langle Q_{n_2}^{-2} [\omega_2] \rangle) \right].$$

(5.56)-დან (5.47)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\langle W(t, |a_1\rangle) \rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_1}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_1+1}^2 C_{a_1}^2) \right];$$

$$\langle W(t, |a_2\rangle) \rangle = \sum_{n_2=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (W_{n_2}^2 C_{a_3}^2 + W_{n_2+1}^2 C_{a_2}^2) \right]; \quad (5.57)$$

$$\langle W(t, |a_3\rangle) \rangle = \langle W(t, |a_1\rangle) \rangle + \langle W(t, |a_2\rangle) \rangle.$$

$W_{n_{1,2}}^2$  აღწერს ველის მდგომარეობებს რეზონატორის შიგნით და მოიცემა პუასონის განაწილებით [119].

$$W_{n_{1,2}}^2 = \frac{\bar{n}_{1,2}^{n_{1,2}} \exp(-\bar{n}_{1,2})}{n_{1,2}}, \quad (5.58)$$

დროის საწყის მომენტში, როდესაც ატომი და ველი ერთმანეთთან დაკავშირებული არ არიან  $C_{a_1}$ ,  $C_{a_2}$ ,  $C_{a_3}$  კოეფიციენტები განსაზღვრავენ ატომის დონეთა დასახლებების ალბათობებს და მათთვის სრულდება პირობა:

$$C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + C_{a_3}^2 = 1.$$

დავუშვათ, რომ დროის საწყის მომენტში ატომი მყოფება ძირითად მდგომარეობაში:

$$\rho_{a_1}(t=0) = |C_{a_1}(t=0)|^2 = 1, \quad \rho_{a_2}(t=0) = \rho_{a_3}(t=0) = 0. \quad (5.59)$$

შესაბამისად საწყისი ენტროპია არის ნულის ტოლი:

$$S(t=0) = -\sum_{a_i=1}^3 \rho_{a_i}(t=0) \ln \rho_{a_i}(t=0) = 0 \quad (5.60)$$

სისტემა იმყოფება სუფთა კვანტურ მდგომარეობაში.

$t > t_0$  დროის შემდეგ სადაც  $t_0 \sim 1/g_0$  დონეებს შორის გადასვლის დროა, ატომმა გარე ველთან ურთიერქმედების გამო შეიძლება შეასრულოს ბევრი გადასვლა ერთი დონიდან სხვა დონეებზე, ამ მიზეზის გამო იმის ალბათობა რომ ატომი აღმოვაჩინოთ სხვა დონეებზეც გახდება ნულისაგან განსხვავებული:

$$C_{a_1} \neq 0, \quad C_{a_2} \neq 0, \quad C_{a_3} \neq 0, \quad t > t_0 \quad (5.61)$$

ეს მოხდება დროით ინტერვალში:

$$t_0 < t < \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \quad (5.62)$$

დროის ამ ინტერვალში (5.53) გამოსახულებების ინტერფერენციული წევრები იქნებიან ნულისაგან განსხვავებული, მაგრამ (5.49) საწყისი მდგომარეობისაგან განსხვავებით სისტემა (5.62) დროით ინტერვალში აღიწერება (5.30) ტალღური ფუნქციით, რაც წარმოადგენს ატომს + ველი მდგომარეობების სუპერპოზიციას. სიმეტრიიდან გამომდინარე (5.61) კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას:

$$C_{a_1} \left( t_0 < t < \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \right) \sim C_{a_2} \left( t_0 < t < \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \right) \sim C_{a_3} \left( t_0 < t < \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \right) \sim C. \quad (5.63)$$

$t > \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}}$  დროის შემდეგ ხდება ინტერფერენციული წევრების გაქრობა და სისტემის გადასვლა ნარევი მდგომარეობაში. ამ დროს დონეების დასახლებები მოიცემა არა (5.61) კოეფიციენტებით არამედ (5.57) ფორმულებით. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ დასახლებები უნდა გამოვიყენოთ (5.57), (5.58), (5.63) ფორმულები და გამოვიყენოთ ნორმირების პირობა:

$$\langle W(t, |a_1\rangle) \rangle + \langle W(t, |a_2\rangle) \rangle + \langle W(t, |a_3\rangle) \rangle = 1 \quad (5.64)$$

(5.57), (5.58) და (5.63) ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$C^2 = \frac{1}{4 - e^{-\bar{n}_1} - e^{-\bar{n}_2}} \quad (5.65)$$

$$\langle W(t, |a_1\rangle) \rangle = \frac{1 - e^{-\bar{n}_1} / 2}{4 - e^{-\bar{n}_1} - e^{-\bar{n}_2}}, \quad \langle W(t, |a_2\rangle) \rangle = \frac{1 - e^{-\bar{n}_2} / 2}{4 - e^{-\bar{n}_1} - e^{-\bar{n}_2}},$$

$$\langle W(t, |a_3\rangle) \rangle = \frac{1 - e^{-\bar{n}_1} / 2}{4 - e^{-\bar{n}_1} - e^{-\bar{n}_2}} + \frac{1 - e^{-\bar{n}_2} / 2}{4 - e^{-\bar{n}_1} - e^{-\bar{n}_2}}, \quad (5.66)$$

როდესაც  $\bar{n}_1 \gg 1$ ,  $\bar{n}_2 \gg 1$  მაშინ (5.66) ფორმულების გამოყენებით დასახლებების ალბათობებისათვის მივიღებთ:

$$\rho_{a_1} = \langle W(t, |a_1\rangle) \rangle = \frac{1}{4}, \quad \rho_{a_2} = \langle W(t, |a_2\rangle) \rangle = \frac{1}{4}, \quad \rho_{a_3} = \langle W(t, |a_3\rangle) \rangle = \frac{2}{4}, \quad (5.67)$$

ე.ი. აღზნებული მდგომარეობა  $\rho_{a_3}$  აღმოჩნდა ორჯერ უფრო მეტად დასახლებული ვიდრე ქვედა დონეები.

(5.67)-დან ენტროპიისათვის მივიღებთ:

$$S_2 \left( t > \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \right) = - \sum_{n=1}^3 \rho_{a_n} \ln \rho_{a_n} = - \left( \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln 8 \quad (5.68)$$

(5.60) და (5.68)-დან ენტროპიის ნაზრდისათვის მივიღებთ;

$$\Delta S = S_2 \left( t > \sqrt{\frac{\alpha_0}{\pi}} \right) - S_1(t=0) = \ln(2\sqrt{2}) > 0 \quad (5.69)$$

ესე იგი პროცესი არის შეუქცევადი.

## 5.5 დასკვნა

ჩვენ განვიხილეთ სამდონიანი ატომის დინამიკა ოპტიკურ რეზონატორში, როდესაც მასზე მოქმედებს რეზონატორის გამოსხივება. ჩვენი ამოცანის სპეციფიკა მდგომარეობს იმაში, რომ აკრძალულია 1 და 2 დონეებს შორის გადასვლები [107-109]. ეს ასიმეტრია ხდის განსახილველ ამოცანას უფრო რთულს და განსხვავდება ადრე განხილული მოდელისაგან [120]. ასეთი სისტემების მიმართ ინტერესი გამოწვეულია იმით რომ შესაძლებელია მათი გამოყენება ქვანტური კომპიუტერის შექმნის საქმეში. ამ დროს წამოიჭრება ასეთი საკითხი, როდის არის შესაძლებელი ასეთი სისტემების კონტროლი და მათში მიმდინარე პროცესები შექცევადი? იმისათვის რომ პასუხი გაგვეცა ამ კითხვაზე განვიხილეთ ყველაზე ზოგადი შემთხვევა როდესაც, ატომის ურთიერთქმედება რეზონატორთან დამოკიდებულია ატომის მდებარეობაზე რეზონატორის შიგნით. განსხვავებით ჩვეულებრივი ჯეიმს-კომინგსის მოდელისაგან, სადაც რეზონანსულ შემთხვევაში, როდესაც ატომის შიდა გადასვლების სიხშირე ემთხვევა ველის სიხშირეს, სისტემის დინამიკა არის რეგულარული, ჩვენს შემთხვევაში რეზონანსულ შემთხვევაში სისტემაში შესაძლებელია ქაოსი და ხდება სისტემის შეუქცევადი გადასვლა სუფთა ქვანტურ-მექანიკური მდგომარეობიდან ნარევიში. დრო, რომელიც საჭიროა ნარევი მდგომარეობის ჩამოსაყალიბებლად  $t > \sqrt{\alpha_0/\pi}$  განისაზღვრება  $\omega(t)$  შემთხვევითი სიდიდის ავტოკორელაციური ფუნქციით. როგორც აღმოჩნდა ზედა დონე აღმოჩნდა ორჯერ უფრო მეტად დასახლებული ქვედა დონეებთან შედარებით, რაც სისტემაში ასიმეტრიის არსებობის შედეგია.

## 6.თავი ორი ბმული ატომის ქაოსური დინამიკა ოპტიკურ რეზონატორში [123]

### 6.1 შესავალი

როგორც ავღნიშნეთ ჯეიმს-კომინგსის მოდელი წარმოადგენს ერთ-ერთ საბაზისო მოდელს ქვანტური რეზონატორების ელექტროდინამიკის შესასწავლად. მბრუნავი ტალღების მიახლოებაში ორდონიანი ატომის ურთიერთქმედება გამოსხივების ველთან შეიძლება აღიწეროს ჰამილტონიანით [99] :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hbar\omega_0\hat{b}^+\hat{b} + \hbar\Omega(\bar{R})(\hat{b}^+\hat{S}^- + \hat{b}\hat{S}^+) \quad (6.1)$$

სადაც  $\hat{R}$  და  $\hat{P}$  არის ატომის მდებარეობის და იმპულსის ოპერატორი. ხოლო  $\Omega(\hat{R})$  არის ბმის მუდმივა ატომისა გამოსხივების ველთან. გადასვლები ატომის ორ დონეს შორის, რომლებიც ერთმანეთისგან გამოყოფილნი არიან  $\hbar\omega_0$  ენერგიით აღიწერება სპინის ოპერატორებით:  $S^\pm$  და  $S^z$ , ხოლო  $\hat{b}^+$  და  $\hat{b}$  შესაბამისად არის ფოტონის დაბადების და გაქრობის ოპერატორი.

როგორც (6.1) ჰამილტონიანიდან ჩანს ჰამილტონიანი დამოკიდებულია სამ სივრცით კოორდინატზე, მაგრამ რაღაც პირობებში ის შეიძლება დაყვანილ იქნას ერთ განზომილებიან შემთხვევაზე:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hbar\omega_0\hat{b}^+\hat{b} + \hbar g_0(\hat{b}^+\hat{S}^- + \hat{b}\hat{S}^+) \cos(kx) \quad (6.2)$$

(6.2) ჰამილტონიანი არის საინტერესო კვანტური გამოთვლების თვალსაზრისით, ვინაიდან ორდონიანი- ატომი + რეზონატორი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც კუბიტი [87-90,102], ანუ კვანტური ბიტი რომელიც კვანტური კომპიუტერის და კვანტური გამოთვლების ბაზისს შეადგენს. უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ კუბიტი არის ისეთი კვანტურ-მექანიკური სისტემა რომელსაც შეუძლია იმყოფებოდეს ორ კვანტურ-მექანიკურ მდგომარეობაში და ისეთ მდგომარეობებში რომელიც ამ მდგომარეობების სუპერპოზიციას წარმოადგენს.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით დიდი მნიშვნელობა აქვს ასეთი სისტემების ზუსტ კონტროლს. კერძოდ [111]-ში შესწავლილი იყო (6.2) ჰამილტონიანი და როგორც ამ შრომაში იყო აღნიშნული ასეთ სისტემის ზუსტი კონტროლი მაშინ არის შესაძლებელი, როდესაც გვაქვს ზუსტი თანხვედრა სისტემის შიდა გადასვლების სიხშირესა და გარე გამოსხივების სიხშირეს შორის, ე.წ. რეზონანსული შემთხვევა. არარეზონანსულ შემთხვევაში შესაძლებელია ქაოსი და სისტემას ვეღარ ვაკონტროლებთ.

იმის გამო რომ სისტემაში გვაქვს გამოსხივების ველი, შესაძლებელია მოხდეს არაპირდაპირი ურთიერთქმედება ორდონიანი ატომის სპინებს შორის, რომელიც (6.2) ჰამილტონიანში არ არის გათვალისწინებული. ასეთი ურთიერთქმედება კარგად არის ცნობილი მაგნიტურ რეზონანსში [121]. იმისათვის რომ მივიღოთ არაპირდაპირი ურთიერთქმედების ჰამილტონიანი, ჩვენ გამოვიყენეთ ფროლიხის მეთოდი [122]. ამ მეთოდის თანახმად ჰამილტონიანი რომელიც აღწერს არაპირდაპირ ურთიერთქმედებას ატომებს შორის შეიძლება მიღებულ იქნას გამოსახულებიდან:

$$\frac{i}{2} \hbar^2 g_0^2 \cos^2(k_f x) \int_{-\infty}^0 dt' [H(t'), H(0)], \quad (6.3)$$

სადაც:

$$\hat{H}(0) = \hat{b}^+ (\hat{S}_1^- + \hat{S}_2^-) + \hat{b} (\hat{S}_1^+ + \hat{S}_2^+)$$

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega_0 (\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z) + \hbar \omega \hat{b}^+ \hat{b} \quad (6.4)$$

$$\hat{H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} \hat{H}(0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}$$

(6.3) გამოსახულებაში მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ფაქტი, რომ ატომები იმდენად ახლოს არიან ერთმანეთთან, რომ საკმაოდ კარგი მიახლოებით მათი კოორდინატები შეცვალოთ ამ სისტემის მასათა ცენტრის კოორდინატებით.  $\cos(k_f x)$   $\hat{V}$  ვეგრი (6.3) გამოსახულებაში შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\cos^2(k_f x) = 1/2 (1 + \cos 2(k_f x)) \approx 1/2. \quad (6.5)$$

მაშინ როდესაც (6.3) გამოსახულება წარმოადგენს მეორე რიგის ეფექტს, თავის მხრივ  $\cos(2k_f x)$  შესწორება წარმოადგენს მესამე რიგის ეფექტს და ახდენს არაპირდაპირი ურთიერთქმედების მოდულაციას. (6.3)-(6.5)-დან ჩვენ მივიღებთ:

$$\hat{V}_{\text{int}} = \frac{g_0^2}{2(\omega - \omega_0)} (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+) \quad (6.6)$$

(6.6) აღწერს ორდონიანი ატომების სპინებს შორის ურთიერთქმედებას, რომელიც გამოწვეულია რეზონატორის ველით.

(6.6) გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$\hat{V}_{\text{int}} = \Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+), \quad \Omega = g_0^2 / 2\Delta\omega_0, \quad \Delta\omega_0 = \omega - \omega_0, \quad (6.7)$$

როგორც (6.6)-(6.7) გამოსახულებიდან ჩანს არაპირდაპირი ურთიერთქმედების როლი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანი ხდება რეზონანსულ შემთხვევაში  $\omega_0 \approx \omega$ , რომლის განხილვასაც ქვემოთ ვაპირებთ.

## 6.2. არაწრფივი ქვანტური დინამიკა.

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ჯეიმს-კომინგსის მოდელი ატომებს შორის არაპირდაპირი ურთიერთქმედების გათვალისწინებით. თუ მხედველობაში მივიღებთ მასათა ცენტრის მოძრაობას და არაპირდაპირ ურთიერთქმედებას ატომებს შორის მაშინ, ჰამილტონიანი ორი ორდონიანი ატომისათვის მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{H}_S + \hat{H}_{SB} + \hat{H}_B \quad (6.8)$$

$\frac{\hat{p}^2}{2m}$  აღწერს ატომების მასათა ცენტრის მოძრაობას რეზონატორში.

$\hat{H}_S = \hbar \omega_a (\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z) + \hbar \Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+)$  აღწერს ამ ჰამილტონიანის სპინურ ნაწილს,

$\hbar \Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+)$  აღწერს ატომებს შორის არაპირდაპირ ურთიერთქმედებას,  $\Omega$  ურთიერთქმედების მუდმივია.

$\hat{H}_{SB} = -\hbar g_0 \cos k_f \hat{x} \cdot ((\hat{S}_1^+ + \hat{S}_2^+) \hat{b} + (\hat{S}_1^- + \hat{S}_2^-) \hat{b}^+)$  აღწერს ატომების ურთიერთქმედებას

გარე ელექტრომაგნიტურ ველთან,  $g_0$  ატომი+ველი ურთიერთქმედების ამპლიტუდაა, ეს ურთიერთქმედება დამოკიდებულია სისტემის მასათა ცენტრის  $\hat{x}$  მდებარეობაზე რეზონატორის შიგნით.

(6.8) გამოსახულების ბოლო წევრი :

$\hat{H}_B = \hbar\omega_f \hat{b}^+ \hat{b}$ , აღწერს რეზონატორის ელექტრომაგნიტურ ველს რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თერმოსტატი.

აღნიშნული (6.8) ჰამილტონიანი გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_a (\hat{s}_1^z + \hat{s}_2^z) + \hbar\Omega (\hat{s}_1^+ \hat{s}_2^- + \hat{s}_1^- \hat{s}_2^+) + \hbar\omega_f \hat{b}^+ \hat{b} - \hbar\Omega_0 \cos k_f \hat{x} \cdot ((\hat{s}_1^+ + \hat{s}_2^+) \hat{b} + (\hat{s}_1^- + \hat{s}_2^-) \hat{b}^+) \quad (6.9)$$

მოცემული ჰამილტონიანი არის ჯეიმს-კომინგსის ტიპის, რომელიც აღწერს ორდონიანი ატომების ერთმანეთთან ურთიერთქმედებას და ურთიერთქმედებას რეზონატორის ელექტრომაგნიტურ ველთან.

$\hat{b}, \hat{b}^+, \hat{s}_1^\pm, \hat{s}_{1z}, \hat{s}_2^\pm, \hat{s}_{2z}$  ოპერატორები აკმაყოფილებენ შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს [105-106, 110]

$$[\hat{b}, \hat{b}^+] = 1, [\hat{s}_{1z}, \hat{s}_1^\pm] = \pm \hat{s}_1^\pm, [\hat{s}_{2z}, \hat{s}_2^\pm] = \pm \hat{s}_2^\pm, [\hat{s}_1^+, \hat{s}_1^-] = 2\hat{s}_{1z}, [\hat{s}_2^+, \hat{s}_2^-] = 2\hat{s}_{2z}. \quad (6.10)$$

დავწვიროთ ჰაიზენბერგის მოძრაობის განტოლებები ოპერატორებისთვის:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x} &= \frac{\hat{p}}{m}, \\ \frac{d}{dt} \hat{p} &= -\hbar\Omega_0 k_f \sin k_f \hat{x} ((\hat{s}_1^- \hat{b}^+ + \hat{s}_1^+ \hat{b}) + (\hat{s}_2^- \hat{b}^+ + \hat{s}_2^+ \hat{b})), \\ \frac{d}{dt} \hat{S}_1^+ &= i\omega_a \hat{S}_1^+ - 2i\Omega \hat{S}_{1z} \hat{S}_2^+ + 2i\Omega_0 \hat{S}_{1z} \hat{b}^+ \cos(k_f \hat{x}), \\ \frac{d}{dt} \hat{S}_1^- &= -i\omega_a \hat{S}_1^- + 2i\Omega \hat{S}_{1z} \hat{S}_2^- - 2i\Omega_0 \hat{S}_{1z} \hat{b} \cos(k_f \hat{x}), \\ \frac{d}{dt} \hat{S}_{1z} &= -i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{s}_1^- \hat{b}^+ - \hat{s}_1^+ \hat{b}) - i\Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- - \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+), \\ \frac{d}{dt} \hat{s}_2^+ &= i\omega_a \hat{s}_2^+ - 2i\Omega \hat{s}_{2z} \hat{s}_1^+ + 2i\Omega_0 \hat{s}_{2z} \hat{b}^+ \cos(k_f \hat{x}), \\ \frac{d}{dt} \hat{s}_2^- &= -i\omega_a \hat{s}_2^- + 2i\Omega \hat{s}_{2z} \hat{s}_1^- - 2i\Omega_0 \hat{s}_{2z} \hat{b} \cos(k_f \hat{x}), \\ \frac{d}{dt} \hat{s}_{2z} &= -i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{s}_2^- \hat{b}^+ - \hat{s}_2^+ \hat{b}) - i\Omega (\hat{s}_2^+ \hat{s}_1^- - \hat{s}_2^- \hat{s}_1^+), \\ \frac{d}{dt} \hat{b}^+ &= i\omega_f \hat{b}^+ - i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{s}_1^+ + \hat{s}_2^+), \\ \frac{d}{dt} \hat{b} &= -i\omega_f \hat{b} + i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{s}_1^- + \hat{s}_2^-). \end{aligned} \quad (6.11)$$

გადავიდეთ მბრუნავ კოორდინატთა სისტემაზე:

$$\hat{b}' = \hat{b} e^{i\omega_f t}, \hat{b}^+ = \hat{b}^+ e^{-i\omega_f t}, \hat{s}_{1,2}^- = \hat{s}_{1,2}^- e^{i\omega_f t}, \hat{s}_{1,2}^+ = \hat{s}_{1,2}^+ e^{-i\omega_f t}, \hat{s}_{1,2z}' = \hat{s}_{1,2z}$$

შედეგად ოპერატორებისათვის მივიღებთ შემდეგ მოძრაობის განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{x} &= \frac{\hat{p}}{m}, \\ \frac{d}{dt} \hat{p} &= -\hbar\Omega_0 k_f \sin k_f \hat{x} ((\hat{s}_1^- \hat{b}^+ + \hat{s}_1^+ \hat{b}) + (\hat{s}_2^- \hat{b}^+ + \hat{s}_2^+ \hat{b})), \\ \frac{d}{dt} \hat{S}_1^+ &= -i(\omega_f - \omega_a) \hat{S}_1^+ - 2i\Omega \hat{S}_{1z} \hat{S}_2^+ + 2i\Omega_0 \hat{S}_{1z} \hat{b}^+ \cos(k_f \hat{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{S}_1^- &= i(\omega_f - \omega_a) \hat{S}_1^- + 2i\Omega \hat{S}_{1z} \hat{S}_2^- - 2i\Omega_0 \hat{S}_{1z} \hat{b} \cos(k_f \hat{x}), \\
\frac{d}{dt} \hat{S}_2^+ &= -i(\omega_f - \omega_a) \hat{S}_2^+ - 2i\Omega \hat{S}_{2z} \hat{S}_1^+ + 2i\Omega_0 \hat{S}_{2z} \hat{b}^+ \cos k_f \hat{x}, \\
\frac{d}{dt} \hat{S}_2^- &= i(\omega_f - \omega_a) \hat{S}_2^- + 2i\Omega \hat{S}_{2z} \hat{S}_1^- - 2i\Omega_0 \hat{S}_{2z} \hat{b} \cos(k_f \hat{x}), \\
\frac{d}{dt} \hat{S}_{1z} &= -i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{S}_1^- \hat{b}^+ - \hat{S}_1^+ \hat{b}) - i\Omega (\hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- - \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+), \\
\frac{d}{dt} \hat{S}_{2z} &= -i\Omega_0 \cos k_f \hat{x} (\hat{S}_2^- \hat{b}^+ - \hat{S}_2^+ \hat{b}) - i\Omega (\hat{S}_2^+ \hat{S}_1^- - \hat{S}_2^- \hat{S}_1^+), \\
\frac{d}{dt} \hat{b}^+ &= -i\Omega_0 \cos k_f \hat{x} (\hat{S}_1^+ + \hat{S}_2^+), \\
\frac{d}{dt} \hat{b} &= i\Omega_0 \cos(k_f \hat{x}) (\hat{S}_1^- + \hat{S}_2^-).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

გავასაშუალოთ და შემოვიღოთ ახალი ცვლადები საშუალო მნიშვნელობებისათვის [111]:

$$x = k_f \langle \hat{x} \rangle, \quad p = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{\hbar k_f}, \quad b_x = \frac{1}{2} \langle \hat{b} + \hat{b}^+ \rangle, \quad b_y = \frac{1}{2i} \langle \hat{b} - \hat{b}^+ \rangle, \quad s_{1x} = \frac{1}{2} \langle \hat{S}_1^- + \hat{S}_1^+ \rangle, \quad s_{1y} = \frac{1}{2i} \langle \hat{S}_1^- - \hat{S}_1^+ \rangle,$$

$$s_{2x} = \frac{1}{2} \langle \hat{S}_2^- + \hat{S}_2^+ \rangle, \quad s_{2y} = \frac{1}{2i} \langle \hat{S}_2^- - \hat{S}_2^+ \rangle, \quad \alpha = \frac{\hbar k_f^2}{m\Omega_0}, \quad \delta = \frac{(\omega_f - \omega_a)}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \tau = \Omega_0 t.$$

შედეგად მოძრაობის განტოლებები საშუალო მნიშვნელობებისათვის ასე დაიწერება:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} x &= \alpha p, \\
\frac{d}{d\tau} p &= -2 \sin x \left\{ (s_{1x} b_x + s_{1y} b_y) + (s_{2x} b_x + s_{2y} b_y) \right\}, \\
\frac{d}{d\tau} s_{1x} &= -\delta s_{1y} + 2s_{1z} b_y \cos x - 2\beta s_{1z} s_{2y}, \\
\frac{d}{d\tau} s_{1y} &= \delta s_{1x} - 2s_{1z} b_x \cos x + 2\beta s_{1z} s_{2x}, \\
\frac{d}{d\tau} s_{1z} &= 2 \cos x (s_{1y} b_x - s_{1x} b_y) + 2\beta (s_{1x} s_{2y} - s_{1y} s_{2x}), \\
\frac{d}{d\tau} s_{2x} &= -\delta s_{2y} + 2s_{2z} b_y \cos x - 2\beta s_{2z} s_{1y}, \\
\frac{d}{d\tau} s_{2y} &= \delta s_{2x} - 2s_{2z} b_x \cos x + 2\beta s_{2z} s_{1x}, \\
\frac{d}{d\tau} s_{2z} &= 2 \cos x (s_{2y} b_x - s_{2x} b_y) + 2\beta (s_{2x} s_{1y} - s_{2y} s_{1x}), \\
\frac{d}{d\tau} b_x &= -\cos x (s_{1y} + s_{2y}), \\
\frac{d}{d\tau} b_y &= -\cos x (s_{1x} + s_{2x}).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

(6.13) განტოლებათა სისტემიდან ადვილია იმის შემოწმება, რომ ინახება შემდეგი სიდიდეები:

$$\begin{aligned} S_1^2 &= s_{1x}^2 + s_{1y}^2 + s_{1z}^2, & S_2^2 &= s_{2x}^2 + s_{2y}^2 + s_{2z}^2, \\ N &= b_x^2 + b_y^2 + s_{1z} + s_{2z}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$W = \frac{\alpha p^2}{2} + 2\beta(s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y}) - 2\cos\{(s_{1x}b_x + s_{1y}b_y) + (s_{2x}b_x + s_{2y}b_y)\} - \delta(s_{1z} + s_{2z}).$$

გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე:

$$u_1 = 2(s_{1x}b_x + s_{1y}b_y), \quad u_2 = 2(s_{2x}b_x + s_{2y}b_y),$$

$$v_1 = 2(b_y s_{1x} - b_x s_{1y}), \quad v_2 = 2(b_y s_{2x} - b_x s_{2y}),$$

$$g = (s_{1x}s_{2y} - s_{1y}s_{2x}), \quad f = (s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y}),$$

შედეგად (6.13) მოძრაობის განტოლებებისა და (6.14) შენახვის კანონების გამოყენებით, მივიღებთ შემდეგ მოძრაობის განტოლებებს ახალი ცვლადებისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x &= \alpha p, \\ \frac{d}{d\tau}p &= -2\sin x\{u_1 + u_2\}, \\ \frac{d}{d\tau}s_{1z} &= -2v_1 \cos x + 2\beta g, \\ \frac{d}{d\tau}s_{2z} &= -2v_2 \cos x - 2\beta g, \\ \frac{du_1}{d\tau} &= \delta v_1 + 2\beta s_{1z}v_2 - 2g \cos x, \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \delta v_2 + 2\beta s_{2z}v_1 + 2g \cos x, \\ \frac{dv_1}{d\tau} &= -\delta u_1 + 2\cos x(S_1^2 - 3s_{1z}^2 + 2Ns_{1z} - 2s_{1z}s_{2z} + f) - 2\beta s_{1z}u_2, \\ \frac{dv_2}{d\tau} &= -\delta u_2 + 2\cos x(S_2^2 - 3s_{2z}^2 + 2Ns_{2z} - 2s_{1z}s_{2z} + f) - 2\beta s_{1z}u_2, \\ \frac{dg}{d\tau} &= \cos x(s_{1z}u_2 - s_{2z}u_1) - 2\beta s_{1z}(S_2^2 - s_{2z}^2) + 2\beta s_{2z}(S_1^2 - s_{1z}^2), \\ \frac{df}{d\tau} &= (s_{1z}v_2 + s_{2z}v_1)\cos x. \end{aligned} \quad (6.15)$$

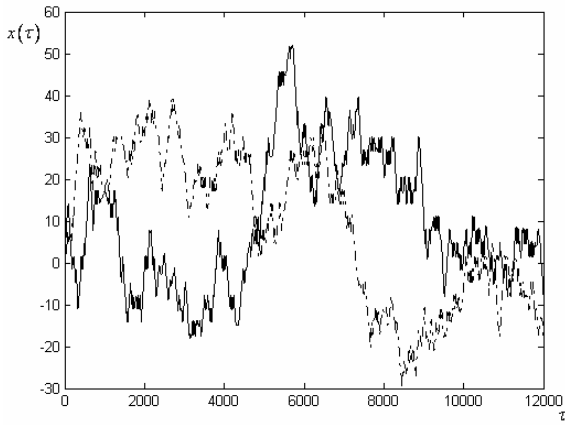
მოცემული (6.15) განტოლებათა სისტემის ანალიზური ამოხსნა არ ხერხდება მაშინაც კი როდესაც  $\delta = 0$ . განსხვავებით ჩვეულებრივი ჯეიმს კოომინგსის მოდელისაგან, სისტემა არაინტეგრებალია. რადგანაც (6.15) სისტემა არაწრფივია შეიძლება პარამეტრების და საწყისი პირობების ისე შერჩევა, რომ მივიღოთ ქაოსური ამონახსნები. თუ ეს ასეა მაშინ ორი კუბიტისგან შემდგარი სისტემის კონტროლი შეუძლებელია.

მაგალითად თუ ავიღებთ პარამეტრების შემდეგ მნიშვნელობებს

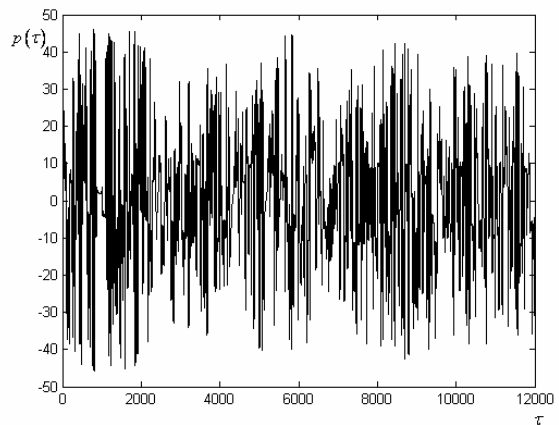
$$\delta = 0, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0.5, \quad S_1^2 = S_2^2 = \frac{3}{4}, \quad N = 10$$

მაშინ საწყისი პირობების შერჩევით შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას რომ სისტემაში გაჩნდეს ქაოსი (იხ. ნახ 6.1).



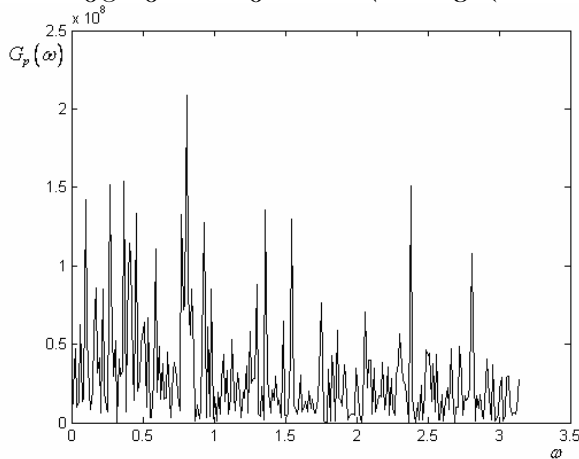


ა)

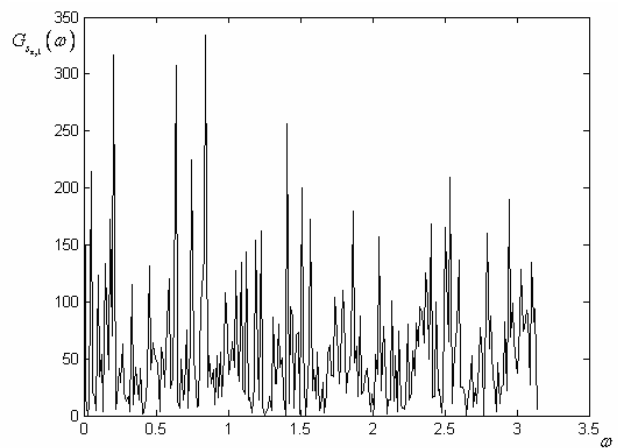


ბ)

ნახ.6.1 ა) ნახაზზე მოცემულია  $x(\tau)$ -ს  $\tau$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. გრაფიკი აგებულია საწყისი პარამეტრების ზემოთ აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის, საწყის პირობებად აღებულია: უწყვეტი ხაზისათვის  $x(0)=1.6$ ,  $p(0)=9.1$ ,  $s_{1z}(0)=0.863$ ,  $s_{2z}(0)=0.863$   $u_1(0)=0.00008145$ ,  $u_2(0)=0.000082452$ ,  $v_1(0)=0.00008325$ ,  $v_2(0)=0.00008416$ ,  $g(0)=0.0000845$   $f(0)=0.0000846$ . წყვეტილი ხაზისათვის აღებულია  $x(0)=1.61$  ხოლო დანარჩენი პარამეტრები აღებულია იგივე. როგორც გრაფიკიდან ჩანს, საწყისი პირობების მცირედი განსხვავება იწვევს  $x(\tau)$ -ს  $\tau$ -ზე დამოკიდებულების დიდ განსხვავებას, ამასთან როგორც ნახაზიდან ჩანს მოძრაობას აქვს არარეგულარილი და ქაოსური ხასიათი და ჩვენ არ შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ სისტემის საბოლოო მდგომარეობა. ბ) ნახაზზე მოცემულია  $p(\tau)$ -ს  $\tau$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. როგორც გრაფიკიდან ჩანს სისტემაში გვაქვს ქაოსური რხევითი რეჟიმი  $p(\tau)$  ცვლადის მიმართ. გრაფიკი აგებულია საწყისი პარამეტრების ზემოთ აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის,



ა)



ბ)

ნახ.6.2 ა) კორელაციური ფუნქციის  $G_p = \langle P(t+\tau)P(t) \rangle$  ფურიე სახე  $p(\omega) = G_p(\omega) = \int d\tau \exp(i\omega\tau) G_p(\tau)$ . კორელაციური ფუნქციის სასრული სიგანე ქაოსის დამადასტურებელი ნიშანია. კორელაციური ფუნქციის ფურიეს სახე  $s_{1z}$  ცვლადისათვის. გრაფიკები აგებულია, პარამეტრების ზემოთ მითითებული მნიშვნელობებისათვის. როგორც ამ გრაფიკებიდან ჩანს მოძრაობას აქვს არარეგულარული და ქაოსური ხასიათი მაშინაც კი როცა  $\delta = 0$ .

სისტემის ქაოსური დინამიკის დასადასტურებლად ჩვენ შევამოწმეთ კოლმოგოროვის ენტროპია, რომელიც მიიღება კორელაციური ფუნქციის ფურიე სახიდან:

$$G(\tau) = \langle \eta(t+\tau)\eta(t) \rangle,$$

$$G(\omega) = \int G(\tau)e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{\tau_c}{1 + \omega^2\tau_c^2} \quad (6.16)$$

სადაც  $\eta(t)$  აღნიშნავს ჩვენთვის საინტერესო დინამიურ ცვლადს და  $\langle(\dots)\rangle$

ნიშნავს დროით გასაშუალოებას:  $\langle(\dots)\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt$ .  $\tau_c$  სიდიდე არის

კორელაციის დრო რომელიც დაკავშირებულია კოლმოგოროვის ენტროპიასთან შემდეგნაირად [12,30]:

$$h_0 \sim \tau_c^{-1}$$

(6.16) გამოსახულება შეიძლება დაითვალოს სწრაფი ფურიე გარდაქმნის მეთოდით [60]. რიცხვითი შედეგები  $p$  და  $s_{z,1}$  ცვლადებისათვის მოყვანილია ნახ.6.3-ზე. კორელაციური ფუნქციის სასრული სიგანე სისტემაში ქაოსის არსებობის დამადასტურებელი ნიშანია [30].

სისტემაში ქაოსის კიდევ ერთი დამადასტურებელი ნიშანია ლიაპუნოვის ექსპონენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ლიაპუნოვის ექსპონენტის მაქსიმალური მნიშვნელობის გამოთვლის ალგორითმი მოყვანილი იყო წინა თავში, [12,15,111] შრომებზე დაყრდნობით. ამ ალგორითმის გამოყენებით დათვლილი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი პარამეტრების ზემოთმოყვანილი მნიშვნელობებისათვის გამოდის დადებითი  $\lambda = 0.52$ , როცა გვაქვს რეზონანსული შემთხვევა  $\delta = 0$ , რაც სისტემაში ქაოსის არსებობის კიდევ ერთი დამადასტურებელი ნიშანია.

### 6.3. კვანტურ-სტატისტიკური განხილვა

როგორც წინა პარაგრაფიდან ჩანს, პარამეტრების რაღაც გარკვეული მნიშვნელობებისათვის გვაქვს ქაოსური მოძრაობა რეზონანსულ შემთხვევაშიც კი. კვანტურ მექანიკური განხილვისას ჩვენ უგულებელვყოფთ ატომის მოძრაობის კინეტიკურ ენერჯიას და მოძრაობის შემთხვევითი ხასიათი შეგვიძლია გავითვალისწინოთ თუ ურთიერთქმედების წევრში  $x$ -ს განვიხილავთ როგორც დროზე დამოკიდებულ შემთხვევით პროცესს.

ურთიერთქმედების წარმოდგენაში შრედინგერის განტოლება შემდეგნაირად იწერება:

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{V}|\Psi(t)\rangle, \quad (6.17)$$

სადაც

$$\hat{V} = +\hbar\Omega(\hat{s}_1^+ \hat{s}_2^- + \hat{s}_1^- \hat{s}_2^+) + \hbar\omega_f \hat{b}^+ \hat{b} - \hbar\Omega_0 \cos k_f \hat{x} \cdot (\hat{s}_1^+ + \hat{s}_2^+) \hat{b} + (\hat{s}_1^- + \hat{s}_2^-) \hat{b}^+ \quad (6.18)$$

ურთიერთქმედების ოპერატორია.

დროის საწყის მომენტში ( $t=0$ ) სისტემის ტალღური ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ატომისა  $|\Psi_{atom}\rangle$  და ველის  $|\Psi_{field}\rangle$  ტალღური ფუნქციების პირდაპირი ნამრავლი:

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_{atom}\rangle \otimes |\Psi_{field}\rangle \quad (6.19)$$

სადაც:

$$|\Psi_{atom}\rangle = C_{00}|00\rangle + C_{01}|01\rangle + C_{10}|10\rangle + C_{11}|11\rangle, \quad (6.20)$$

ხოლო

$$|\Psi_{field}\rangle = \sum_n W_n |n\rangle, \quad (6.21)$$

(6.18) ურთიერთქმედების შედეგად შესაძლებელია გადასვლები შემდეგ მდგომარეობებს შორის:

$$|0,0,n+1\rangle \leftrightarrow |0,1,n\rangle, |0,0,n+1\rangle \leftrightarrow |1,0,n\rangle, \quad (6.22)$$

$$|0,1,n\rangle \leftrightarrow |1,1,n-1\rangle, |1,0,n\rangle \leftrightarrow |1,1,n-1\rangle,$$

$$|1,0,n\rangle \leftrightarrow |0,1,n\rangle, \quad (6.23)$$

(6.22) შეესაბამება გადასვლებს ენერგიის იმ მდგომარეობებს შორის, რომელიც ცვლის ფოტონების რიცხვს, ხოლო (6.23) შეესაბამება შიდა სპინურ გადასვლებს. ამიტომ ბუნებრივია ვეძებოთ  $|\Psi(t)\rangle$  შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = & \sum_n C_{0,0,n+1} |0,0,n+1\rangle + \\ & + \sum_n C_{0,1,n} |0,0,n\rangle + \sum_n C_{1,0,n} |1,0,n\rangle + \sum_n C_{1,1,n-1} |1,1,n-1\rangle, \end{aligned} \quad (6.24)$$

თუ (6.24) ფუნქციას ჩავსვავთ შრედინგერის განტოლებაში მივიღებთ რომ:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} C_{0,0,n+1} = & \Omega C_{0,0,n+1} - \Omega_0 \cos k_f \hat{x} \sqrt{n+1} (C_{1,0,n} + C_{0,1,n}), \\ i \frac{d}{dt} C_{1,1,n-1} = & \Omega C_{1,1,n-1} - \Omega_0 \cos k_f \hat{x} \sqrt{n} (C_{1,0,n} + C_{0,1,n}), \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$i \frac{d}{dt} C_{0,1,n} = \Omega C_{1,0,n} - \Omega_0 \cos k_f \hat{x} (C_{1,1,n} \sqrt{n} + C_{0,0,n+1} \sqrt{n+1}),$$

$$i \frac{d}{dt} C_{1,0,n} = \Omega C_{0,1,n} - \Omega_0 \cos k_f \hat{x} (C_{1,1,n-1} \sqrt{n} + C_{0,0,n+1} \sqrt{n+1}),$$

(6.25) განტოლებათა სისტემის ამოხსნით  $C$  კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ [123]:

$$\begin{aligned} C_{0,0,n+1} = & \frac{C_1 e^{-i\Omega t}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} Q[\omega[t]] - \frac{C_2 e^{-i\Omega t}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1} Q^{-1}[\omega[t]] + \\ & + \left( \frac{C_4}{2\sqrt{n+1}} - \frac{C_1}{4\sqrt{2}\sqrt{n+1}(2n+1)} + \frac{C_2}{4\sqrt{2}\sqrt{n+1}(2n+1)} \right) e^{-i\Omega t}, \\ C_{1,1,n-1} = & \frac{C_1 e^{-i\Omega t}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} Q[\omega[t]] - \frac{C_2 e^{-i\Omega t}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} Q^{-1}[\omega[t]] + \\ & + \left( -\frac{C_4}{2\sqrt{n+1}} + \frac{C_1}{4\sqrt{2}\sqrt{n+1}(2n+1)} - \frac{C_2}{4\sqrt{2}\sqrt{n+1}(2n+1)} \right) e^{-i\Omega t}, \\ C_{1,0,n} = & \frac{C_1}{4\sqrt{2n+1}} e^{-i\Omega t} Q[\omega(t)] + \frac{C_2}{4\sqrt{2n+1}} e^{-i\Omega t} Q^{-1}[\omega(t)] + \frac{C_3}{2} e^{i\Omega t}, \\ C_{0,1,n} = & \frac{C_1}{4\sqrt{2n+1}} e^{-i\Omega t} Q[\omega(t)] + \frac{C_2}{4\sqrt{2n+1}} e^{-i\Omega t} Q^{-1}[\omega(t)] - \frac{C_3}{2} e^{i\Omega t}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

როგორც (6.26)-დან ჩანს ორი კუბიტის ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება განისაზღვრება ფუნქციონალით:

$$Q[[\omega(t)]] = e^{i \int_0^t \omega(t') dt'} \quad (6.27)$$

$$\text{სადაც: } \omega(t) = \sqrt{2} \sqrt{2n+1} \Omega_0 \cos k_f x(t). \quad (6.28)$$

როგორც (6.27) და (6.28)-დან ჩანს ქვანტური მდგომარეობის დროზე დამოკიდებულება დამოკიდებულია  $x(t)$ -ზე. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ სისტემის მდგომარეობა, საჭიროა ვიცოდეთ კოორდინატის როგორც დროის ფუნქციის ზუსტი ფორმა  $x(t)$ .

მეორეს მხრივ როგორც წინა განყოფილებაში იყო ნაჩვენები, როდესაც სისტემის დინამიკა არის ქაოსური  $x(t)$  შეიძლება განხილული იქნას როგორც შემთხვევითი სიდიდე. ამ შემთხვევაში (6.27) ფუნქციონალი უნდა გავსაშუალოთ  $x(t)$  შემთხვევითი ცვლადის ყველა შესაძლო რეალიზაციით. ეს პროცედურა ანალოგიურია წინა თავის ჩატარებული გასაშუალოების პროცედურისა (ფორმულები (5.41)-(5.47)). ამიტომ მოვიყვანოთ საბოლოო შედეგი:

$$Q[\omega(t)] = \exp\left[-\frac{t}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \operatorname{erf}(t\sqrt{\alpha})\right], \quad (6.29)$$

დავუშვათ რომ საწყის მომენტში ატომის მდგომარეობას აქვს სახე:

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi_{atom}\rangle \otimes |\Psi_{field}\rangle, \quad (6.30)$$

სადაც

$$|\Psi_{atom}\rangle = C_{00}|00\rangle + C_{01}|01\rangle + C_{10}|10\rangle + C_{11}|11\rangle, \quad (6.31)$$

$$|\Psi_{field}\rangle = \sum_n W_n |n\rangle,$$

თუ შევადარებთ (6.30) და (6.31)-ს სისტემის ტალღურ ფუნქციას დროის საწყის მომენტში:

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \sum_n C_{0,0,n+1}(0) |0,0,n+1\rangle + \\ &+ \sum_n C_{0,1,n}(0) |0,0,n\rangle + \sum_n C_{1,0,n}(0) |1,0,n\rangle + \sum_n C_{1,1,n-1}(0) |1,1,n-1\rangle, \end{aligned}$$

საწყისი მდგომარეობებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$C_{00} W_{n+1} = C_{00n+1}(0), C_{01} W_n = C_{01n}(0), C_{10} W_n = C_{10n}(0), C_{00} W_{n+1} = C_{00n+1}(0) \quad (6.32)$$

ექსპერიმენტზე იზომება დონეთა დასახლებებს შორის სხვაობა:

$$I_{11,01} = W(t,|11\rangle) - W(t,|01\rangle), I_{11,10} = W(t,|11\rangle) - W(t,|10\rangle), \quad (6.33)$$

$$I_{10,00} = W(t,|10\rangle) - W(t,|00\rangle), I_{01,00} = W(t,|01\rangle) - W(t,|00\rangle),$$

$$I_{11,00} = W(t,|11\rangle) - W(t,|00\rangle) = \frac{1}{2}(I_{11,01} + I_{11,10}) + \frac{1}{2}(I_{01,00} + I_{10,00}).$$

სადაც:

$$W(t,|11\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{11n-1}(t)|^2, W(t,|01\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{01n}(t)|^2, \quad (6.34)$$

$$W(t,|10\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{10n}(t)|^2, W(t,|00\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{00n+1}(t)|^2,$$

დავთვალოთ მაგალითად  $W(t,|1,0\rangle)$ , მაშინ თუ გავითვალისწინებთ (6.26) და (6.29) მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle W(t, |1, 0) \rangle &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n + C_{01} W_n)^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (\sqrt{n+1} C_{00} W_{n+1} + \sqrt{n} C_{11} W_{n-1})^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n - C_{01} W_n)^2 + \langle W(t, |10) \rangle_{\text{int}} \end{aligned} \quad (6.35)$$

სადაც  $\langle W(t, |10) \rangle_{\text{int}}$  იგულისხმება ინტერფერენციული წვევრები, რომლებიც შეიცავენ  $\langle \mathcal{Q}^2[\omega(t)] \rangle$ ,  $\langle \mathcal{Q}^2[\omega(t)] \rangle$ ,  $\langle e^{2i\Omega} \mathcal{Q}^{-1}[\omega[t]] \rangle$  და ასე შემდეგ. ამ წვევრების შეფასება შეიძლება ისევე როგორც  $\langle \mathcal{Q}[\omega(t)] \rangle$ -სი,

$$\text{მაგალითად} \quad \langle \mathcal{Q}^2[\omega(t)] \rangle = \exp\left(-t\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{erf}(t\sqrt{\alpha})\right), \quad \text{ასევე}$$

$$\langle e^{2i\Omega} \mathcal{Q}^{-1}[\omega[t]] \rangle = e^{2i\Omega} \exp\left(-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \text{erf}(t\sqrt{\alpha})\right), \quad \text{ასეთი წვევრების წვლილი როგორც ამ}$$

ფორმულებიდან ჩანს როცა  $t \gg \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ , ხდება ძალიან მცირე, და მათი საშუალო მნიშვნელობები მიისწრაფიან ნულისაკენ.

ამიტომ როცა  $t \gg \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle W(t, |1, 0) \rangle &= \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n + C_{01} W_n)^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (\sqrt{n+1} C_{00} W_{n+1} + \sqrt{n} C_{11} W_{n-1})^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n - C_{01} W_n)^2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

თუ ანალოგიურ მსჯელობებს ჩავატარებთ

$\langle W(t, |0, 0) \rangle$ ,  $\langle W(t, |0, 1) \rangle$ ,  $\langle W(t, |1, 1) \rangle$ -ებისათვის მივიღებთ რომ:

$$\begin{aligned} \langle W(t, |0, 0) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4(2n+1)} (C_{10} W_n + C_{01} W_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)^2} (\sqrt{n+1} C_{00} W_{n+1} + \sqrt{n} C_{11} W_{n-1})^2 + \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} (\sqrt{n} C_{00} W_{n+1} - \sqrt{n+1} C_{11} W_{n-1})^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle W(t, |1, 1) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4(2n+1)} (C_{10} W_n + C_{01} W_n)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} (\sqrt{n+1} C_{00} W_{n+1} + \sqrt{n} C_{11} W_{n-1})^2 + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)^2} (\sqrt{n} C_{00} W_{n+1} - \sqrt{n+1} C_{11} W_{n-1})^2. \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \langle W(t, |1, 0) \rangle &= \langle W(t, |0, 1) \rangle = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n + C_{01} W_n)^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (\sqrt{n+1} C_{00} W_{n+1} + \sqrt{n} C_{11} W_{n-1})^2 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (C_{10} W_n - C_{01} W_n)^2. \end{aligned}$$

აქ  $C_{00}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{11}$ , მდგომარეობის დასახლებების აღბათობებია და  $W_n$  აღწერს ველის მდგომარეობას და აქვს პუასონის განწილების სახე [119]:

$$W_n^2 = \frac{\bar{n}}{n!} \exp(-\bar{n}), \quad (6.38)$$

სადაც  $\bar{n} = \lambda \bar{I} T$ , აქ  $\bar{I}$  ელექტრომაგნიტური ველის (სინათლის) ინტენსივობაა,  $T$  დაკვირვების დრო,  $\lambda$  პროპორციულობის კოეფიციენტი.

დავუშვათ რომ ატომი თავიდან იმყოფებოდა  $C_{00n+1}$  მდგომარეობაში, მაშინ

$$\rho_{00}(t=0) = |C_{00n+1}(0)|^2 = 1, \quad \rho_{11}(t=0) = \rho_{10}(t=0) = \rho_{01}(t=0) = 0, \quad \text{მაშინ ენტროპია}$$

$$S(t=0) = -\sum_{ij=0}^1 \rho_{ij} \ln \rho_{ij} = 0, \quad \text{და სისტემა არის სუფთა მდგომარეობაში, როდესაც}$$

ურთიერთქმედება ირთვება  $t_0 \sim 1/g_0$ ,  $t > t_0$  დროის შემდეგ, სისტემა ასწრებს გადასვლას დონეებს შორის. ამიტომაც იმის ალბათობა რომ აღმოვაჩინოთ სისტემა სხვა მდგომარეობებში არ არის ნულის ტოლი:

$$C_{11} \neq 0, \quad C_{01} \neq 0, \quad C_{10} \neq 0, \quad t > t_0 \quad (6.39)$$

მიუხედავად ამისა ჯერ კიდევ ადრეა ვილაპარაკოთ სხვადასხვა დონეების დასახლებების ალბათობაზე. ამის მიზეზი არის ის რომ  $t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროით ინტერვალში (6.26) გამოსახულებებში ინტერფერენციული წევრები არ არიან ნულის ტოლი. მაგრამ განსხვავებით საწყისი მდგომარეობისა,  $t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}$  სისტემა იმყოფება მდგომარეობაში რომელიც წარმოადგენს  $|0, 0, n+1\rangle, |0, 1, n\rangle, |1, 0, n\rangle, |1, 1, n-1\rangle$ , მდგომარეობების სუპერპოზიციას.

სუპერპოზიციული მდგომარეობა არის სუფთა კვანტური მდგომარეობა. მხოლოდ ინტერფერენციული წევრების განულების შემდეგ, სისტემა გადადის ნარევი მდგომარეობაში. ეს გადასვლა ხდება  $t > \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროებზე.

$t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროით ინტერვალში როდესაც სისტემა არის სუპერპოზიციულ მდგომარეობაში, სიმეტრიის მოსაზრებიდან შეგვიძლია დავუშვათ, რომ (6.29) კოეფიციენტებისათვის სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$\begin{aligned} C_{00}(t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}) &\sim C_{11}(t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}) \sim \\ &\sim C_{01}(t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}) \sim C_{10}(t_0 < t < \sqrt{\alpha_0/\pi}) \sim C \end{aligned} \quad (6.40)$$

$t \gg \sqrt{\alpha/\pi}$  დროის შემდეგ ინტერფერენციული წევრების წვლილი ხდება ძალიან მცირე და ისინი მიიღვევიან ექსპონენციალურად. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $C_{ij}, i, j=01$  კოეფიციენტებისათვის (6.40) პირობა სრულდება  $t > \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროებზეც.

$t > \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროებზე დონეების დასახლებების ალბათობების როლს თამაშობს არა (6.39) კოეფიციენტები, არამედ ისინი განისაზღვრებიან (6.35)-(6.37) გამოსახულებებით.

მაშინ  $\langle W(t, |i, j\rangle) \rangle$ ,  $i, j=0,1$  კოეფიციენტების ნორმირების პირობიდან გვექნება რომ

$$\sum_{i,j=0}^1 \langle W(t, |ij\rangle) \rangle = 1, \quad \text{თუ აქ გავითვალისწინებთ (6.37) და (6.40) გამოსახულებებს,}$$

მივიღებთ რომ:

$$C^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (W_n^2 + W_{n+1}^2 + W_{n-1}^2) \right) = 1, \quad (6.41)$$

გარდა ამისა  $\langle W(t,|0,1) \rangle = \langle W(t,|1,0) \rangle$ , ასევე როგორც (6.37) გამოსახულებიდან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \langle W(t,|1,1) \rangle + \langle W(t,|0,0) \rangle &= \langle W(t,|0,1) \rangle + \langle W(t,|1,0) \rangle + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)} (\sqrt{n}C_{00}W_{n+1} - \sqrt{n+1}C_{11}W_{n-1})^2 \end{aligned} \quad (6.42)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $t > \sqrt{\alpha_0/\pi}$  დროებზე როდესაც ჩამოყალიბდა უკვე ნარევი მდგომარეობა სისტემაში დონეების

$$\rho_1 = \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi} | 01) \rangle = a, \quad \rho_2 = \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi} | 11) \rangle = b, \quad (6.43)$$

დასახლებების აღბათობები უფრო მეტია, ვიდრე

$$\rho_3 = \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi} | 01) \rangle = \rho_4 = \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi} | 10) \rangle = c \quad (6.44)$$

დასახლებების აღბათობები.

დავუშვათ  $\rho_{10}(t) = \rho_{01}(t) = a$ ,  $\rho_{00}(t) = b$ ,  $\rho_{11}(t) = c$ , მაშინ ნორმირების პირობიდან გვექნება რომ  $Tr(\hat{\rho}) = 2a + b + c = 1$ ,  $a + b > 2c$  და  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < c < 1$ , აქედან ენტროპიის ნაზრდისათვის მივიღებთ:

$$\Delta S = -(2a \ln a + b \ln b + c \ln c) > 0 \quad (6.45)$$

ე.ი. პროცესი შეუქცევადია.

აქვე უნდა აღინიშნოს ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტი. დროის საწყისი მომენტისათვის, რადგან არ გვაქვს ურთიერთქმედება ველსა და ატომს შორის  $C_{00}^2$ ,  $C_{01}^2$ ,  $C_{10}^2$ ,  $C_{11}^2$ , კოეფიციენტები აღწერენ ატომის მდგომარეობის დასახლებების აღბათობებს და ამიტომაც ისინი ნორმირებულნი არიან ერთზე.

$$C_{00}^2 + C_{01}^2 + C_{10}^2 + C_{11}^2 = 1, \quad (6.46)$$

ურთიერთქმედების ჩართვის შემდეგ ხდება გადასვლები ატომის სხვადასხვა მდგომარეობებს შორის და ჩვენ აღარ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ ცალკე-ცალკე ველის მდგომარეობაზე და ატომის მდგომარეობაზე, არამედ ეს სისტემა უნდა განვიხილოთ როგორც მთლიანი, ეს ჩანს

$\langle W(t,|0,0) \rangle, \langle W(t,|0,1) \rangle, \langle W(t,|1,1) \rangle, \langle W(t,|1,0) \rangle$  კოეფიციენტების გამოსახულებებიდან.

როცა  $t < \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ , ამ დროის ინტერვალში

$\langle W(t,|0,0) \rangle, \langle W(t,|0,1) \rangle, \langle W(t,|1,1) \rangle, \langle W(t,|1,0) \rangle$  კოეფიციენტებში გვაქვს

ინტერფერენციული წვერები, მხოლოდ  $t \gg \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  დროის შემდეგ ხდება ამ

წვერების მიღევა, ამ დროს, რადგანაც ჩართული გვაქვს ელექტრომაგნიტური ველი,  $C_{00}^2$ ,  $C_{01}^2$ ,  $C_{10}^2$ ,  $C_{11}^2$ , კოეფიციენტები ვეღარ შეასრულებენ ატომის დონეთა დასახლებულობის აღბათობის როლს, არამედ ამ როლს ასრულებენ

$\langle W(t,|0,0) \rangle, \langle W(t,|0,1) \rangle, \langle W(t,|1,1) \rangle, \langle W(t,|1,0) \rangle$  კოეფიციენტები და ბუნებრივია

მოვითხოვთ მათი ნორმირება ერთზე:

$$\langle W(t,|0,0) \rangle + \langle W(t,|0,1) \rangle + \langle W(t,|1,1) \rangle + \langle W(t,|1,0) \rangle = 1. \quad (6.47)$$

თუ აქ გავითვალისწინებთ (6.37) და (6.40) გამოსახულებებს, მივიღებთ (6.41) გამოსახულებას:

$$C^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} (W_n^2 + W_{n+1}^2 + W_{n-1}^2) \right) = 1,$$

თუ აქ ჩავსვავთ (6.38) გამოსახულებას და ავჯამავთ მივიღებთ რომ:

$$C^2 = \frac{1}{4 - \exp(-\bar{n})}, \quad (6.48)$$

როგორც (6.48)-დან ჩანს  $4C^2 = \frac{4}{4 - \exp(-\bar{n})} \neq 1$ . მხოლოდ როცა  $\bar{n} \gg 1$  გვაქვს

რომ  $4C^2 \approx 1$ , რადგანაც  $\bar{n} \sim T$ , ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ რომ დიდი

დაკვირვების დროის შემდეგ, როცა  $T \gg \frac{1}{\lambda I}$ , შეგვიძლია ჩავთვალოთ  $C_{00}^2$ ,

$C_{01}^2, C_{10}^2, C_{11}^2$  კოეფიციენტები როგორც ატომის დონეების დასახლებულობის ალბათობები.

თუ ჩავსვავთ (6.38) გამოსახულებას (6.37)-ში და გავითვალისწინებთ (6.40) ტოლობებს მაშინ  $W$  კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \langle W(t, |0,1\rangle) \rangle &= \langle W(t, |1,0\rangle) \rangle = \frac{C^2}{2} + \frac{C^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n-1} \exp(-\bar{n})(n+\bar{n})^2}{n!(2n+1)}, \\ \langle W(t, |1,1\rangle) \rangle &= C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)} \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n}) + \frac{C^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} \frac{\bar{n}^{n-1}(n+\bar{n})^2}{n!} \exp(-\bar{n}) + \\ &+ C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{\bar{n}^{n-1}(n+1-\bar{n})^2}{n!} \exp(-\bar{n}), \quad (6.49) \\ \langle W(t, |00\rangle) \rangle &= C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)} \frac{\bar{n}^n}{n!} \exp(-\bar{n}) + \frac{C^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)^2} \frac{\bar{n}^{n-1}(n+\bar{n})^2}{n!} \exp(-\bar{n}) + \\ &+ C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} \frac{\bar{n}^{n-1}(n+1-\bar{n})^2}{(n+1)!} \exp(-\bar{n}), \end{aligned}$$

აღსანიშნავია, რომ  $W$  კოეფიციენტების (6.47) გამოსახულების ჩასმით და აჯამებით შეგვიძლია შევამოწმოთ (6.48) გამოსახულების სამართლიანობა.

საბოლოოდ მოვიყვანოთ  $W$  კოეფიციენტების ზუსტი მნიშვნელობები, რომლებიც მიიღება (6.49) გამოსახულებების აჯამებით:

$$\begin{aligned} \langle W(t, |0,1\rangle) \rangle &= \langle W(t, |1,0\rangle) \rangle = \frac{C^2}{2} + \frac{C^2}{4} \cdot \frac{1}{8} \left( 12 - \frac{2}{\bar{n}} + \frac{\exp(-\bar{n})\sqrt{\pi}(1-2\bar{n})^2 \operatorname{erfi}(\sqrt{\bar{n}})}{\bar{n}^{3/2}} \right), \\ \langle W(t, |1,1\rangle) \rangle &= C^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{\exp(-\bar{n})\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(\bar{n})}{4\bar{n}} \right) + \quad (6.50) \\ &+ \frac{C^2 \exp(-\bar{n})}{2} \left( \frac{1}{3} (3 - 2\bar{n} + \bar{n}^2) F \left[ \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \bar{n} \right] \right) + \\ \frac{C^2 \exp(-\bar{n})}{2} &\left( \frac{1}{25} (13\bar{n} - \bar{n}^2) F \left[ \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \bar{n} \right] + \frac{3}{49} \bar{n}^2 F \left[ \left\{ \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \left\{ \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right\}, \bar{n} \right] \right). \\ \langle W(t, |0,0\rangle) \rangle &= C^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\exp(-\bar{n})\sqrt{\pi} \operatorname{erfi}(\bar{n})}{4\bar{n}} \right) + \\ \frac{C^2}{1058400\bar{n}^{3/2}} &\{ 33075[2\sqrt{\bar{n}}(-16\bar{n} + \exp(\bar{n})(3 - 14\bar{n} - 16\bar{n}^2)) - 3\sqrt{\pi}(1 - 2\bar{n})^2 \operatorname{erfi}(\sqrt{\bar{n}})] + \\ &+ 32\bar{n}^{3/2}[33075\bar{n}F \left[ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}, \bar{n} \right] + 3675(12 + 5\bar{n}^2)F \left[ \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \bar{n} \right] + \\ &27\bar{n}[147(14 - 2\bar{n} + \bar{n}^2)F \left[ \left\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right\}, \left\{ \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \bar{n} \right] - 50(-12 + \bar{n})\bar{n}F \left[ \left\{ \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right\}, \left\{ \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right\}, \bar{n} \right]] + \end{aligned}$$



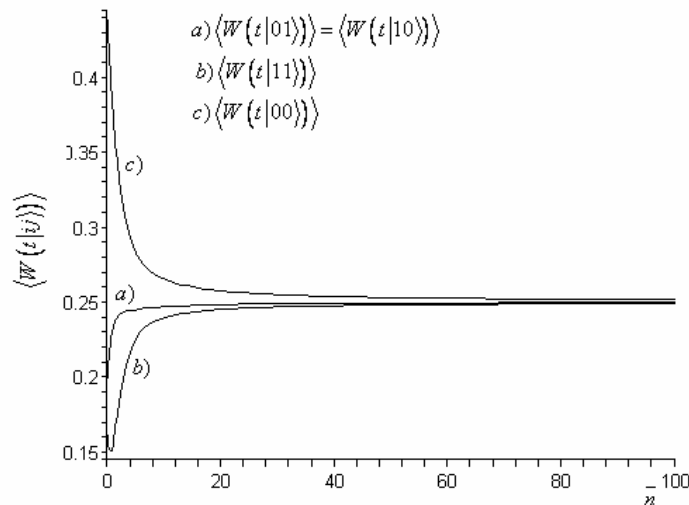
$$+1225\bar{n}^3 F\left[\left\{\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right\}, \left\{\frac{11}{2}, \frac{11}{2}\right\}, \bar{n}\right],$$

აქ  $\operatorname{Erfi} = i^{-1}\operatorname{Erf}(iz)$ , სადაც  $\operatorname{erf}(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^z e^{-t^2} dt$ .

$F[\{a_1 \dots a_p\}, \{b_1 \dots b_q\}, z]$  არის განზოგადებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია [112], რომელსაც აქვს მწკრივად შემდეგნაირი წარმოდგენა:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_1)_k \dots (a_p)_k / (b_1)_k \dots (b_q)_k z^k / k!$$

ბოლოს მოვიყვანოთ  $\langle W(t,|0,0) \rangle, \langle W(t,|0,1) \rangle, \langle W(t,|1,1) \rangle, \langle W(t,|1,0) \rangle$  კოეფიციენტების  $\bar{n}$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი, რომლებიც მიიღება (6.50) გამოსახულებებიდან:



ნახ.6.3  $W$  კოეფიციენტების  $\bar{n}$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. ჰორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია  $\bar{n}$ , ვერტიკალურ ღერძზე  $W$  კოეფიციენტები. როგორც ამ გრაფიკებიდან ჩანს, რადგანაც  $\bar{n} \sim T$ , თუ დაკვირვების დრო მცირეა

$\sqrt{\pi/\alpha} \ll T \ll \frac{1}{\lambda I}$ , მაშინ ყველაზე უფრო დასახლებულია  $\langle W(t,|0,0) \rangle$  ქვედა

დონე, და ყველაზე ნაკლებად ზედა  $\langle W(t,|1,1) \rangle$  დონე, დაკვირვების დროის გაზრდის შემდეგ, ხდება დონეების დასახლებების გათანაბრება და როცა

დაკვირვების დრო  $T \gg \frac{1}{\lambda I}$ , სრულდება პირობა:

$$\langle W(t,|0,0) \rangle = \langle W(t,|0,1) \rangle = \langle W(t,|1,1) \rangle = \langle W(t,|1,0) \rangle.$$

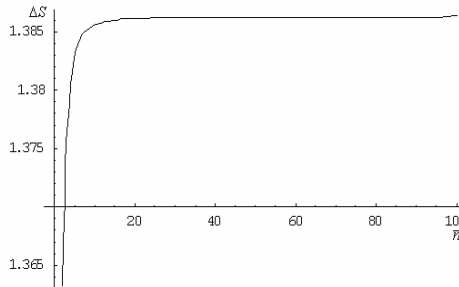
(6.50) გამოსახულებებში, დონეთა დასახლებები დამოკიდებულია ფოტონების საშუალო რიცხვზე  $\bar{n}$  რეზონატორის შიგნით. როგორც ნახ.6.3-6.4-დან ჩანს დიდი  $\bar{n} \gg 1$  შემთხვევაში ხდება დონეთა დასახლებების  $\langle W(t,|ij) \rangle, i, j = 0, 1$  სტოხასტური გაჯერება. ერთი შეხედვით ეს არ არის თანხმობაში (6.42) გამოსახულებასთან. მაგრამ მხედველობაში უნდა მივიღოთ ის ფაქტი, რომ (6.42) გამოსახულების, ბოლო წევრი ხდება ძალიან მცირე როდესაც  $\bar{n} \gg 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)} \left( \sqrt{n} C_{00} W_{n+1} - \sqrt{n+1} C_{11} W_{n-1} \right)^2 \rightarrow 0 \quad (6.51)$$

შედგება ჩვენ მივდივართ შემდეგ პირობამდე:

$$\begin{aligned} \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |0,0) \rangle &= \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |0,1) \rangle = \\ &= \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |1,1) \rangle = \langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |1,0) \rangle. \end{aligned} \quad (6.52)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ გამოსხივების ველი ფოტონების დიდი რიცხვით შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც თერმოსტატი უსასრულო ტემპერატურით, მაშინ როცა ფოტონების მცირე რიცხვის შემთხვევაში  $\bar{n} \sim 1$  შესაძლებელია მივიღოთ უფრო მეტად დასახლებული  $\langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |0,0) \rangle$ ,  $\langle W(t > \sqrt{\alpha_0/\pi}, |1,1) \rangle$  დონეები.



ნახ.6.4  $\Delta S$ -ის  $\bar{n}$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი, როგორც ამ გრაფიკიდან ჩანს  $\Delta S > 0$ , ესე იგი პროცესი არის შეუქცევადი.

## 6.4 დასკვნა

ჩვენი მიზანი იყო შეგვესწავლა ორი ბმული ორდონიანი ატომის დინამიკა გარე რეზონატორის ველში. ასეთი სისტემების მიმართ ინტერესი გამოწვეულია იმით რომ შესაძლებელია მათი გამოყენება კვანტურ კომპიუტერში, ამ დროს დგება საკითხი თუ რამდენად არის სისტემის მდგომარეობები კონტროლირებადი და პროცესი შეუქცევადი? ჩვენ განვიხილეთ ყველაზე ზოგადი შემთხვევა, როდესაც სისტემის ურთიერთქმედება გარე ველთან დამოკიდებულია მის კოორდინატზე სისტემის შიგნით.

განსხვავებით საეთოდ მიღებული აზრისა, რეზონანსული შემთხვევა არ არის გარანტია იმისა, რომ სისტემის დინამიკა იქნება რეგულარული. კვანტურ მექანიკურად დროში ევოლუციისას სისტემა ახდენს გადასვლას სუფთა მდგომარეობიდან ნარევიში. დროის ის შუალედი რომელიც საჭიროა ნარევი მდგომარეობის ჩამოსაყალიბებლად, განისაზღვრება  $x(t)$  შემთხვევითი სიდიდის ავტოკორელაციის ფუნქციის სივანით.

## 7. ძირითადი შედეგები

1. შესწავლილია ბირთვული პარამაგნეტური რეზონანსის ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ნიმუში რეზონატორში არის მოთავსებული, რომელიც საკვლევ სისტემაზე უკუგაგლენას ახორციელებს. დამაგნიტების ვექტორის განტოლება ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ბლოხის განტოლებას, რომელშიც ზემოთხსენებული უკუგაგლენის დამატებითი არაწრფივი წევრების საშუალებით არის გათვალისწინებული. არაწრფივი განტოლებათა სისტემის რიცხვითი ანალიზის საფუძველზე ნაჩვენებია, რომ საკმარისად ძლიერი არაწრფივობის შემთხვევაში დამაგნიტების ვექტორის ჰოდოგრაფი ქაოსურ ხასიათს ატარებს, რომელიც “უცნაურ” ატრაქტორს წააგავს.

ვაჩვენეთ რომ ჩვენს მიერ მიღებული უცნაური ატრაქტორის ფრაქტალური განზომილება არის  $D \approx 2.22$ , ხოლო სტოხასტური მოძრაობის კორელაციური ფუნქციის ფურიე სპექტრის სიგანე ნულისაგან განსხვავებულია, გამოთვლილია მისი რიცხვითი მნიშვნელობა კონკრეტული პარამეტრების შემთხვევაში.

2. ლანდაუ-ლიფშიცის განტოლების საფუძველზე შესწავლილია ფერომაგნიტური რეზონანსის ამოცანა თხელი ფერომაგნიტური ფირებისათვის იმ შემთხვევაში, როცა ცვალებადი გამაჯერებელი მონოქრომატული ველის ნაცვლად გამოიყენება მაღალსიხშირული იმპულსების პერიოდული სერია. ჩვენს მიერ ნაჩვენებია, რომ როცა იმპულსების სერიის პარამეტრები გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებენ სისტემაში წარმოიქმნება ე. წ. რეზონანსური ქაოსური გაჯერება. ამგვარად მიიღება დამაგნიტების ვექტორის დიდი გადახრები, რისი მიღწევაც შეუძლებელი იყო მონოქრომატული ველის გამოყენების შემთხვევაში.  $Fe-Ni$  შენადნობის ნიმუშისათვის ნაჩვენებია რომ სტოხასტური გაჯერება მიიღწევა მაშინ როდესაც სტოხასტურობის კოეფიციენტი  $K \approx 3.37$ .

3. ერთი დამაგნიტების ვექტორის სტოხასტური გაჯერების ამოცანა განზოგადებულია ორი სპინისათვის და შემდეგ სპინური მძივისათვის, რომელებიც მოთავსებულია გარე მუდმივ და ცვლად მაგნიტურ ველებში. ანალიზური და რიცხვითი მეთოდებით ნაჩვენებია რომ გარე ცვლადი იმპულსური ველის პარამეტრების სათანადო შერჩევით შეგვიძლია სტოხასტურ რეჟიმში ვმართოთ მოცემული სისტემა გადავხაროთ ის საწყისი მდგომარეობიდან და შემდეგ დავტოვოთ ამ მდგომარეობაში გარკვეული დროის განმავლობაში, რომელსაც ეწოდება სტოხასტური კონტროლისა და დინამური გაყინვის მექანიზმი. მიღებულია კრიტერიუმი, რომელიც სტოხასტური კონტროლის საშუალებას იძლევა.

4. შესწავლილია განზოგადებულ ჯეიმს-კომინგსის მოდელში ქაოსის წარმოქმნის მექანიზმი ზოგად შემთხვევაში, როდესაც მხედველობაში ვიღებთ ატომის მასათა ცენტრის მოძრაობას რეზონატორში. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში ნაჩვენებია, რომ რეზონანსის პირობა არ გაძლევს სისტემაზე კონტროლის განხორციელების გარანტიას, როგორც ეს აქამდე იყო მიღებული. ნაჩვენებია, რომ კვანტურ ენაზე ქაოსის წარმოქმნას შეესაბამება გადასვლა სუფთა მდგომარეობიდან ნარევი და ამ დროს ადგილი აქვს ტალღური ფუნქციის ფაზის შესახებ ინფორმაციის დაკარგვას. შეფასებულია სუფთა მდგომარეობიდან ნარევი გადასვლის დრო. ნაჩვენებია, რომ მყარდება ნარევი მდგომარეობა რომელიც ხასიათდება დიაგონალური სიმკვრივის მატრიცით.

5. ნაჩვენებია რომ ჩვეულებრივ ჯეიმს-კომინგსის მოდელშიც შესაძლებელია ქაოსის მიღება თუ ამ მოდელის პირობებში დამატებით მხედველობაში მივიღებთ არაპირდაპირ გაცვლით ურთიერთქმედებას ორდონიან ატომებს შორის. ამ დროს ქაოსი წარმოიქმნება რეზონანსულ შემთხვევაშიც, როდესაც ატომების დონეებს შორის გადასვლის სიხშირე ემთხვევა რეზონატორის სიხშირეს. კვანტუნმექანიკურად აქაც ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში ადგილი აქვს სუფთა მდგომარეობიდან ნარევი გადასვლას და ტალღური ფუნქციის ფაზის

შესახებ ინფორმაციის დაკარგვას. ნაჩვენებია, რომ სუფთა მდგომარეობიდან ნარევი გადასვლის დროს ადგილი აქვს ენტროპიის ზრდას რაც ამ პროცესის შეუქცევადობაზე მეტყველებს.

ბოლოს მადლობა მინდა გადავუხადო სამეცნიერო ხელმძღვანელს ბატონ არჩილ უგულავას მეცნიერული თანამშრომლობისა და გაწეული მხარდაჭერისთვის. ლევან ჭოტორღიშვილს მეცნიერული თანამშრომლობისთვის.

მადლობას ვუხდით აგრეთვე თსუ ფიზიკის მიმართულების თანამშრომლებს კობა ხუციშვილს, ნატაშა ფოკინას, სოსო ჩხაიძეს, კოტე ნიკოლაძეს საქმიანი შენიშვნებისა და წლების განმავლობაში თანამშრომლობისთვის.

მადლობას ვუხდით აგრეთვე ზოგადი ფიზიკის სასწავლო-სამეცნიერო ლაბორატორიის გამგეს იური პაპავას და ლაბორატორიის თანამშრომლებს ქეთინო გამყრელიძეს და ნანა კონტუაძეს მხარდაჭერისთვის.

## ლიტერატურა:

- [1] Николис Г. Пригожин И. «**Познание сложного**», Москва, Мир,1990, 342 с;
- [2] «**Физическая энциклопедия**», М. 1998, Т.5, 688 с;
- [3] Шустер Г. «**Детерминированный хаос**», Москва, Мир,1998, 240 с;
- [4] Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. **Теоретическая Физика, Т.1, Механика**, Москва, «Наука», 1988, 215 с;
- [5] Edward N. Lorenz, “**Deterministic Nonperiodic Flow**”, Journal of the Atmospheric Sciences,1963, 20, p.130-141;
- [6] А. Пуанкаре, «**Новые методы небесной механики**», Избр. Труды, Том 1, Москва, «Наука», 1971, 771 с;
- [7] S. Grossmann, S. Thomae, (1977), “ **Invariant Distributions and stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes**”, Z.Naturforsch. 32A,1353.
- [8] Feigenbaum M.J. (1978) “**Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations**”, J. Stat. Phys. 19,25.
- [9] Feigenbaum M. J.”**Universal Behavior in Nonlinear Systems**”, Los-Alamos Science. 1980, v. 1, No. 1, pp. 4—27.
- М. Фейгенбаум, “**УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**”, УФН, 1983, Т. 121, вып.2, с. 343-374.
- [10] P.Coullet , J.Tresser , (1978), J. Phys. (Paris) Coll. 39, C5-25.
- [11] П. Берже, И. Помо, К.Видаль, «**Порядок в Хаосе**», Москва , «Мир», 1991, 366 с;
- [12] А. Лихтенберг, М. Либерман, «**Регулярная и стохастическая динамика**», Москва, Мир, 1984, 536 с;
- [13] Н. Peitgen, Н. Jürgens, D. Saupe, “**Chaos and Fractals**”, Springer, 1992, 984 p;
- [14] С.П. Кузнецов, «**Динамический Хаос**», Москва, «Эдиторьял», 2000, 295 с;
- [15] Ю. И. Неймарк, П.С. Ланда, «**Стохастическое и хаотические колебания**», Москва, Наука, 1987, 424 с.
- [16] R.M. May , “**Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics**” Nature 261, 1976, 459-467;
- [17] Ф. Мун, «**Хаотические колебания**», Москва, Мир, 1990, 311 с;
- [18] P. Grassberger, I. Procaccia, “**Characterization of Strange Attractors**”, Phys. Rev. Letters, 50, 346-349, 1983;

- [19] М. Табор, **«Хаос и Интегрируемость в нелинейной динамике»**, Москва, «Эдиторьял», 2002, 331 с;
- [20] Г. Голдстейн, **«Классическая механика»**, Москва, «Наука», 1975, 415 с;
- [21] А. Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, **«Введение в Синергетику»**, Москва, «Наука», 1990, 272 с;
- [22] А. Ю. Лоскутов, **«Динамический Хаос Системы классической механики»**, УФН, т. 177, № 9, 2007, с 989-1015;
- [23] А. М. Переломов, **«Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли»**, Москва, Наука, 1990, 239 с;
- [24] В. И. Арнолд, **«Обыкновенные дифференциальные уравнения»**, Москва, Наука, 1975, 236 с;
- [25] В.И. Арнольд, **«Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений»**, Москва, Наука, 1978, 304 с;
- [26] Б.В. Чириков, **«Взаимодействие нелинейных резонансов»**, Новосибирск: НГУ, 1978, 78 с;
- [27] Б.В. Чириков, **«Нелинейный резонанс»**, Новосибирск: НГУ, 1977, 80 с;
- [28] B.V. Chirikov, **«A Universal instability of many dimensional oscillator systems»**, Phys. Rep. 52, № 5, (1979), pp 263-379;
- [29] Г.М. Заславский, **«Стохастичность Динамических систем»**, Москва, Наука, 1984, 271 с;
- [30] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, **«Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса»**, Москва, Наука, 1988, 368 с;
- [31] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков, **«Введение в теорию колебаний и волн»**, Москва, Наука, 1984, 432 с;
- [32] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, **«Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний»**, Москва, Гос. Изд. Физ.-мат. Литературы, 1958, 406 с.;
- [33] А. Найфе, **«Введение в методы возмущений»**, Москва, Мир, 1984, 535 с.;
- [34] А. Н. Колмогоров, **«О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона»**.- ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527-530,
- [35] В.И. Арнольд, **«Малые знаменатели и проблема устойчивости в классической и небесной механике»**, УМН, 1963, т.18, № 6, с. 92-191;
- [36] Ю. Мозер, в сб. Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей, Т.6, Москва, Мир, 1962, с. 51;

- [37] Г.М. Заславский, Б.В. Чириков, «**Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний**», УФН, т.105, 1971, вып.1, с. 3-40;
- [38] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников, «**Минимальный хаос, стохастическая паутина и структуры с симметрией типа «квазикристалл»**», УФН, т. 156, вып.2, 1988, с. 193-250;
- [39] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников, «**Слабый хаос и квазирегулярные структуры**», Москва, Наука, 1991, 240 с;
- [40] Р. Балеску, «**Равновесная и неравновесная статистическая механика**», том 2, Москва, Мир, 1978, 399 с.;
- [41] И.С. Градштейн и И.М. Рыжик, «**Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений**», Москва, «Наука», 1971, 1108 с;
- [42] A.I. Ugulava, L.L. Chotorlishvili, Z.Z. Toklikishvili and A.V. Sagaradze, „**Chaotic dynamics of the nuclear magnetization on account of resonator effects**“, Low Temperature Physics, vol. 32, №10, pp. 915-920, 2006;
- [43] Л.Л. Чоторлишвили, В.М. Цхварадзе, «**Стохастическая динамика ядерной намагниченности в ферромагнетиках**», ФНТ 30, вып 9, 2004, 981-985;
- [44] Yu. F. Kiselev, A. F. Prudkoglyad, A. S. Shumovskii, and V. I. Yukalov, “**Detection of superradiant emission from a system of nuclear magnetic moments**” Zh. Eksp. Teor. Fiz. 94, 344-349;
- [45] Н.А. Бажалов, Д. С. Буляница, А.И. Ковалов и др., ФТТ 31, вып.2, 206, 1989;
- [46] Yu.F. Kisilev, A.S. Shumovsky, and V.I. Yukalov, “**Thermal- Noise induced radio frequency superradince in resonator**“, Mod. Phys. Lett. 3, 1149-1156, 1989;
- [47] В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин, «**Основы теории колебаний**», Москва, Наука, 1978, 392 с;
- [48] Н. М. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, «**Физические основы квантовой магнитометрий**», Москва, Наука, 1972, 448 с;
- [49] О. В. Назарова, Н. П. Фокина, К. О. Хуцишвили, «**Влияние спинового резонатора на сигналы ядерного стимулированного эха в магнетиках**» ФММ, 1991, N10, С.44-49;
- [50] N.P.Fokina, K.O.Khutsishvili and S.G. Chkhaidze, “**On the problem of pure superradiance in the radiofrequency range at NMR inhomogeneous broadening**”, Physica B 179 (1992), p. 171-178;
- [51] K.O.Khutsishvili and S.G. Chkhaidze, **Nuclear spins coherent radiofrequency irradiation in ferromagnets**, Physica B 176 (1992), p. 54-60;
- [52] Н.П. Фокина, К.О. Хуцишвили, С. Г. Чхаидзе, «**Радиочастотное сверхизлучение и непрерывная генерация ядерными магнитными моментами**», ЖЭТФ, 102, вып. 3, 1013-1024, (1992);

- [53] R.F. Robson, and R. Kayser, **“Some effects of radiation Feedback in High Resolution NMR”**, J. Magn. Reson. 20, 458, 1975, p 1969-1992;
- [54] А. Абрагам, **«Ядерный Магнетизм»**, Москва, ИЛ, 1963, 551 с;
- [55] Н.Н.Моисеев, **«Асимптотические методы нелинейной механики»**, Москва, Наука, (1981), 379 с;
- [56] И.М. Бабаков, **«Теория Колебаний»**, Москва, Наука, 1968, 559 с;
- [57] P.Grassberger, Phys.Lett. A, **“Generalized dimensions of strange attractors”**, v.97, p. 227-230,(1983);
- [58] P.Grassberger, Phys.Lett. A, **“On the fractal dimension of the Henon attractor”** v.97,p.224-226, (1983);
- [59] P.Grassberger, I.Procaccia, Physica D, **“Measuring the strangeness of strange attractors”** , v.9, 189-208, 1983;
- [60] G.M.Tenkins and D.G.Watts, **“Spectral Analysis and its Applications”** (Holden-Day,1978), 599 p;
- [61] A.I. Ugulava, L.L. Chotorlishvili and Z.Z. Toklikishvili, **„ Theory of stochastic saturation of ferromagnetic resonance“** , Low Temperature Physics, vol. 34, №6, pp. 418-421,2008;
- [62] Я.А. Моносов, **«Нелинейный Ферромагнитный Резонанс»**, Москва, Наука, 1971;
- [63] В.С. Львов, **«Нелинейные спиновые вольны»**, Москва, Наука, 1987, 272 с;
- [64] P.H. Bryant, C.D. Jeffries, K. Nakamura, **Spin-wave dynamics in a ferrimagnetic sphere**, Phys. Rev. A,38, 4223-4240, 1988 ;
- [65] S.T. Chui, **“Spin reversal in bilayer ultrathin magnetic films”**, Phys. Rev. B 55, 3688-3692 (1997);
- [66] Б. Н. Филипов, **«Статические свойства и нелинейная динамика доменных границ с вихреподобной внутренней структурой в магнитных пленках»**, ФНТ, 286 вып 10, 991-1032, (2002);
- [67] X. Waintal, O. Parcollet, **«Current-Induced Spin Torque in a Nanomagnet»** Phys. Rev. Lett. 94, 247206, (2005);
- [68] D. Xiao, M. Tsoi, Q.J. Niu, **“Minimal field requirement in precessional magnetization switching”** , J. Appl. Phys. 99, 013903 (2006);
- [69] Д.И. Семенцов, А. М. Шутый, **«Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах»**, УФН, т.177, №8, 2007, с 811-857;
- [70] **«Тонкие ферромагнитные пленки»**, сб. Статей, Москва, Мир, 1964, 359 с;
- [71] В.В. Тихонов, А.В. Толкачев, ФТТ, 36, 185, 1994;



- [72] D.A.Garanin, “**Fokker- Plank and Landau-Lifshitz-Bloch equations for classical ferromagnets**”, Phys.Rev.B Vol.55, N55, p3050-3057 ,1996;
- [73] L.D.landau and E.M. Lifshitz, «**К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел**», z.Phys. Sowjet. 8.153,1935;
- Л.Д. Ландау, Собрание трудов, т 1, Москва, Наука, 1969, 512 с;
- [74] В. М. Елеонский, Н.Н. Кирова, «**Самолокализованные состояния магнитного момента во вращающемся магнитном поле**», ЖЭТФ, 75, вып8, 1978, с. 658-662,
- [75] A.M. Kosevich, B.A. Ivanov and A.S. Kovalov, “**Magnetic Solitons**”, Phys. Reports, 194, №3 & 4, 1990, p.117-238;
- [76] G. Wysin, A.R. Bishop, “**Chaos and coherence in classical one-dimensional magnets**” J. Magn. Mater. V. 54-57, №4, 1132-1134;
- [77] H. Yamazaki, M. Mino, Prog. Theor. Phys. Suppl, №98, 400-419, 1989;
- [78] М.М. Богдан, М.И. Кобец, Е.Н. Хацко, «**Хаотические режимы антиферромагнитного резонанса в квазидвумерном легкоосном антиферромагнетике  $(NH_3)_2(CH_2)_4MnC_4$** », ФНТ, т.25. № 3, с. 263-276, 1999;
- [79] Л.Л. Буишвили, А.И. Угулава, «**О Стохастическом движении вектора ядерной намагниченности**», ФТТ, Том 25, В.8, 2370-2373, 1983;
- [80] В.И. Кесаев, А.И. Угулава, «**Теория Стохастического Насыщения ЯМР в Магнитоупорядоченных Кристаллах**», ФТТ, Том 27, В. 4, 1259-1261, 1985;
- [81] Е.А. Туров, М.И. Куркин, В.В. Николаев, «**Движение ядерных спинов с учетом их взаимодействия по Сулу и Накамура**», ЖЭТФ, Т. 64, Вып.1, 283-300;
- [82] А.И. Угулава, «**Регулярная и Стохастическая Динамика Парамагнитных Спиновых Систем**», Докторская Диссертация, Тбилиси, 1987, 270 с;
- [83] «**Таблицы Физических Величин**», Справочник под редакцией И. К. Кикоина Москва, Атомиздат, 1976, 1008 с;
- [84] L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, J. Berakdar, „**Stochastic switching and dynamical freezing in nonlinear spin systems**“, Physics Letters A, 373, (2009), 231-237;
- [85] L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, J. Berakdar, “**Stochastic dynamics and control of a driven nonlinear spin chain: the role of Arnold diffusion**”, Journal of Physics, Condensed Matter 21, 356001 (2009);
- [86] X.Z. Yuan, H.-S. Goan, and K.D. Zhu, “**Non-Markovian reduced dynamics and entanglement evolution of two coupled spins in a quantum spin environment**”, Phys. Rev. B 75, 045331 (2007).

- [87] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H. J. Kimble, “**Measurement of Conditional Phase Shifts for Quantum Logic**”, Phys. Rev. Lett. 75, 4710–4713 (1995);
- [88] H. Mabuchi, A. Doherty, “**Cavity Quantum Electrodynamics: Coherence in Context**” Science 298 (2002) 1372-1377;
- [89] C. J. Hood, T. W. Lynn, A. C. Doherty, A. S. Parkins, and H. J. Kimble, “**The Atom-Cavity Microscope: Single Atoms Bound in Orbit by Single Photons** “ , Science 287 (2000) 1447-1453;
- [90] J. Raimond, M. Brune, S. Haroche, “**Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity**” Rev. Mod. Phys. 73, 565-582, (2001).
- [91] M. Lakshmanan, A. Saxena, “**Dynamic and Static Excitations of a Classical Discrete Anisotropic Heisenberg Ferromagnetic Spin Chain**”, arXiv: 0712.2503, 31 p;
- [92] Y. Zolotaryuk, S. Flach, V. Fleurov, “**Discrete breathers in classical spin lattices**”, Phys. Rev. B, 63 (2001) 214422.
- [93] A. Matos-Abiague, J. Berakdar, “**Geometric origin of dynamically induced freezing of quantum evolution**”, Phys. Rev. A, 73 (2006) 024102;
- [94] A. Matos-Abiague, J. Berakdar, “**Aharonov-Anandan phase and the quasistationarity of driven quantum systems**”, Europhys. Lett. 71, (2005), 705-711;
- [95] C. Mejia-Monasterio, T. Prosen, G. Gasati, **Fourier's law in a quantum spin chain and the onset of quantum chaos**, Europhys. Lett. 72 (2005) 520-526;
- [96] K. Saito, “**Strong evidence of normal heat conduction in a one-dimensional quantum system**”, Europhys. Lett. 61 (2003) 34-40;
- [97] L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, „**Chaos in generalized Jaynes-Cummings model**“, Physics Letters A, 372 (2008), 2806-2815;
- [98] L. Novontny and B. Hecht, “**Principes of nano-optics**”, Cambridge University Press, 2008, 939 p;
- [99] P. Schleich, “**Quantum Optics in Phase Space**”, Wiley–VCH, Berlin, 2001, 760 p;
- [100] Takao Aoki, Barak Dayan, E. Wilcut, W. P. Bowen, A. S. Parkins, T. J. Kippenberg, K. J. Vahala and H. J. Kimble, “**Observation of strong coupling between one atom and a monolithic microresonator**”, Nature 443 (2006) 671-675;
- [101] Д. Н. Клышко, «**Физические основы квантовой электроники**», Москва, Наука, 1986, 296 с;
- [102] გ. გიორგაძე, ზ. მელიქიშვილი, “**კვანტური გამოთვლები**”, თბილისი, 2009 წ. 180 გვ.
- [103] H.I. Yoo, J.H. Eberly, “**Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields**”, Phys. Rep. 118 (1985) 240-337;

- [104] Л. Аллен, Дж. Эберли, «**Оптический резонанс и двухуровневые атомы**», Москва, Мир, 1978, 222 с;
- [105] Р. Пантел, Г. Путхоф, «**Основы квантовой Электроники**», Москва, Мир, 1972, 384 с;
- [106] У. Люселл, «**Излучение и шумы в квантовой электронике**», Москва, Наука, 1972, 398 с;
- [107] N.N. Bogoliubov Jr., FamLe Kien, A.S. Shumovsky, “**Two-Photon Process in a three-level system**”, Phys. Lett. A 101 (1984) 201;
- [108] Н. Н. Боголюбов (мл), Б. И. Садовников, А. С. Шумовский, «**Математические методы статистической механики модельных систем**», Москва, Наука, 1989, 296 с;
- [109] X.Li, N. Bei, “**A generalized three-level Jaynes-Cummings model**”, Phys.Lett A, vol. 101, 169;
- [110] Р. Фейнман «**Статистическая механика**», Москва, Мир, 1978, 407 с;
- [111] S. Prants, N. Edelman, G. Zaslavsky, “**Chaos and flights in the atom-photon interaction in the cavity QED**”, Phys. Rev. E 66 (2002) 046222;
- [112] **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**, National Bureau of Standards, Applied Mathematical Series, vol. 55, US Government Printing Office, Washington, DC, 1964, 830 p;
- [113] V. Afraimovich, S.-B. Hsu, “**Lectures on Chaotic Dynamical Systems**”, American Mathematical Society, International Press, 2000;
- [114] К. Блум, «**Теория матрицы плотности и ее приложения**», Москва, Мир, 1983, 248 с;
- [115] И. В. Александров, «**Теория Магнитной Релаксаций**», Москва, Наука, 1975, 399 с;
- [116] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, «**Специальные Функций**», Москва, Наука, 1968, 342 с;
- [117] В. Г. Левич, **Курс Теоретической Физики**, Том 1, Москва, Наука, 1969, 909 с;  
В. Г. Левич, Ю. А. Вдовин, В.А. Мямлин, **Курс Теоретической Физики**, Том 2, Москва, Наука, 1971, 936 с;
- [118] Sh. Averbukh, “**Fractional revivals in the Jaynes-Cummings model**”, Phys. Rev. A 46, R2205–R2208 (1992);
- [119] R. Loudon, “**The Quantum Theory of Light**”, Clarendon Press, Oxford, 1973, 488 p;
- [120] D. Shepelyansky, “**Chaos and Interaction of Atoms with Self-Consistent Fields in the Case of Small Coupling Constants**”, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 1815;
- [121] A. Abragam, M. Goldman, “**Nuclear magnetism**”, Clarendon Press, Oxford, 1982, 660 p;

[122] C. Kittel, **“Quantum theory of Solids”**, John Wiley and Sons, New-York, 1963, 493 p;

[123] L. Chotorlishvili, Z. Toklikishvili, **„Chaotic dynamics of coupled two-level atoms in the optical cavity“**, Eur. Phys.J. D 47, 433-445 (2008);